

## De Shannon capaciteit van een graaf

In verband met een probleem uit de informatietheorie definieerde Claude Shannon in 1956 de *zero-error capacity*  $\Theta(G)$  van een graaf  $G$ . In dit project bestuderen we deze graafparameter, die tegenwoordig de naam *Shannon capaciteit* draagt.

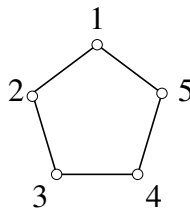
Zij  $G = (V, E)$  een graaf. Een deelverzameling  $S$  van de puntenverzameling  $V$  heet *onafhankelijk* als  $\{u, v\} \notin E$  voor alle  $u, v \in S$ . Het maximale aantal elementen van een onafhankelijke verzameling wordt genoteerd met  $\alpha(G)$ .

Het product  $G_1 \otimes G_2$  van de grafen  $G_1 = (V_1, E_1)$  en  $G_2 = (V_2, E_2)$  is de graaf met als puntenverzameling  $V_1 \times V_2$ , waarbij verschillende punten  $(u_1, u_2)$  en  $(v_1, v_2)$  een lijn vormen als  $u_i = v_i$  of  $\{u_i, v_i\} \in E_i$  voor  $i = 1, 2$ . Het  $n$ -voudig product  $G \otimes G \otimes \dots \otimes G$  noteren we met  $G^n$ .

De Shannon capaciteit  $\Theta(G)$  van een graaf  $G$  is gedefinieerd door:

$$\Theta(G) := \sup_{n \rightarrow \infty} (\alpha(G^n))^{\frac{1}{n}}.$$

**Voorbeeld.** Neem als graaf de 5-cykel  $C_5$ :



Er geldt  $\alpha(C_5) = 2$ , maar  $\Theta(C_5) \geq \sqrt{\alpha(C_5^2)} \geq \sqrt{5}$ , want

$$\{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 2), (5, 4)\}$$

is een onafhankelijke verzameling in  $C_5 \otimes C_5$ .

Al in 1956 stelde Shannon de vraag om  $\Theta(C_5)$  te bepalen. Pas 20 jaar later gaf Lovász hier een verrassend elegant antwoord op. Hij maakte daarbij gebruik van een meetkundige methode, die belangrijk is geweest in de ontwikkeling van de semidefiniete programmering.

Dit project biedt de student de gelegenheid om kennis te maken met semidefiniete programmering en eigenwaarde-technieken voor grafen. Er is een substantiele literatuur over  $\Theta$  en een mogelijke invulling van dit project is een literatuurstudie waarbij de belangrijkste resultaten gestructureerd worden gepresenteerd.

Er zijn ook voldoende mogelijkheden om iets nieuws bij te dragen. Het bepalen van  $\Theta(C_7)$  (en de capaciteit van langere oneven cyclen) is nog steeds een open probleem! Er zijn diverse richtingen van onderzoek mogelijk waaronder het verbeteren van expliciete constructies en het bestuderen van varianten op de methode van Lovász en de rangfunctie van Haemers.

**Begeleider:** Dion Gijswijt.