

Gestoord Hamiltoncykel probleem

Gegeven een netwerk van N steden en hun verbindingswegen. Gevraagd is om een route te ontwerpen die elke stad precies één keer bezoekt, zodat je weer in de stad eindigt waar je begonnen bent. De Wiskundige formulering van dit probleem is het bepalen van een Hamiltoncykel in een ongerichte of gerichte graaf. Op voorhand is nog niet eens duidelijk of er wel een Hamiltoncykel is.

Dit probleem is één van de beruchte problemen uit de combinatorische optimalisering. De laatste jaren is er een uitgebreide onderzoek gestart, waarbij het probleem stochastisch wordt gemaakt. De hoop is hierdoor algoritmes te kunnen ontwikkelen die in de praktijk sneller werken dan de bestaande algoritmes uit de combinatorische optimalisering.

Wat is de ‘stochastische variant’? Dat is de volgende Markov beslissingsketen: de toestanden zijn de knopen (‘steden’) uit de graaf. De mogelijke acties is in knoop i zijn de verschillende pijlen vanuit knoop i , oftewel de collectie toestanden die je vanuit deze knoop via een pijl kunt bereiken. Een Hamilton cykel correspondeert dan met een deterministische strategie, d.w.z. een strategie die in elke knoop één actie voorschrijft, op zó’n manier dat de verzameling gekozen acties precies alle knopen is.

Het doel is om een opbrengst functie zo te kiezen dat een Hamilton cykel correspondeert met een optimale strategie als er een Hamilton cykel is. Daardoor komen algoritmes uit de theorie van Markov beslissingsketens beschikbaar om dit probleem op te lossen.

Je zou dit kunnen doen door de stationaire kans op knoop 1 te minimaliseren. Maar dan zal een optimale strategie altijd cyclen kiezen die knoop 1 niet bevatten.

In een recent artikel van Ejov, Filar en Nguyen wordt een perturbatie van dit probleem bestudeerd. Daar wordt aangetoond dat een Hamilton cykel correspondeert met de beste deterministische strategie, maar het is een open probleem of een Hamilton cykel ook correspondeert met de optimale strategie in de klassen van alle strategieën.

Je zou ook naar andere opbrengstfuncties kunnen kijken: bijv. de terugkeertijd naar toestand 1. Wellicht geven die betere mogelijkheden voor het ontwerpen van praktisch interessante algoritmes. Het project kan de volgende onderdelen omvatten:

1. bestuderen van het artikel van Ejov, Filar, Nguyen;
2. bewijzen dat de Hamilton cykel correspondeert met een optimale strategie, of een tegenvoorbeeld hiervoor ontwerpen;
3. andere opbrengstfuncties bestuderen.

Floske Spieksma
spieksma@math.leidenuniv.nl
Bachelorproject voor het AS&B seminarium
voorjaar 2010