Project: Optimaal Fritzen

"Fritzen" is een dobbelspel met 6 dobbelstenen en een willekeurig aantal spelers.

We bekijken eerst de simpele variant, dat er maar één speler is. De regels zijn als volgt.

Gooi de 6 dobbelstenen. Noem het aantal ogen A_0. Er zijn verschillende situaties mogelijk.

1) $\boldsymbol{A_0 < 10}$ **of** $\boldsymbol{A_0 > 30}$. Je krijgt geen boete en het spel stopt.

2) $\boldsymbol{10 \leq A_0 \leq 30}$. Je kunt drie dingen doen.

- **i)** Stoppen. Dan krijg je een boete $30 - A_0$.
- **ii)** Stel D is de collectie dobbelstenen die je het laatst gegooid hebt. Dan mag je opnieuw gooien met de een keuze van dobbelstenen uit de set D, waarvan je er *minstens één* moet laten liggen. Noem de opnieuw gegooide set weer D. Ga naar **1** of **2** afhankelijk van het totaal aantal ogen van de dobbelstenen. Herhaal dit totdat je bent gestopt of totdat $D = \emptyset$.
- **iii)** Je besluit een 'straat' proberen te halen (respectievelijk aantal ogen per dobbelsteen: $1, 2, 3, 4, 5, 6$). Hierbij gelden weer dezelfde regels als onder (ii) voor de vervolgworpen.

Het doel is een gooistrategie te bepalen met minimale verwachte boete.

Dit probleem is als een dynamisch programmeringsprobleem te modelleren. Het project omvat de volgende onderwerpen.

1) Specificeer het dynamisch programmeringsprobleem.

2) Programmeer dit en bepaal de optimale gooistrategie. Het aantal mogelijke ogencombinaties van de 6 dobbelstenen na de eerste worp is $\binom{11}{6} = 462$. In geval **2** zijn er maximaal $2^6 - 1 = 63$ mogelijke keuzen van opnieuw te gooien dobbelstenen (als ze allemaal een verschillende uitslag hadden). Een alternatief is om eerst het spel zonder 'straat'-actie te bestuderen.

3) Heeft de optimale strategie een 'mooie' structuur? Hierbij kun je denken aan het volgende. Stel op grond van het gegooide aantal ogen in de eerste worp is het optimaal om de 5 laagste dobbelstenen opnieuw te gooien. Is het dan ook optimaal om de 5 laagste opnieuw te gooien bij een eerste worp met een kleiner aantal ogen op de 5 dobbelstenen met de laagste uitslag?

4) Het is onrealistisch om een printje naast je naar te leggen met alle optimale keuzen bij het spelen van dit spel. Is er een 'simpele' heuristiek te bedenken die goed werkt?

5) Kun je de gevonden structuren ook bewijzen als bijvoorbeeld het aantal dobbelstenen meer dan 6 is?

Dit project kan worden uitgebreid tot het bestuderen van het echte 'Fritzen'. Hierbij speel je het spel met meer dan één speler. Afhankelijk van de uitkomst kunnen de andere spelers een boete krijgen. De boeteregels voor de andere spelers zijn de volgende:

- Als jij eindigt met minder dan 10 ogen, krijgen de andere spelers 10 boete.

- Stel jij eindigt met meer dan 30 ogen. Laat $N = S(\text{mod}30)$ met $S \in \{1, \ldots, 6\}$. Als jij nog beurten 'over' hebt, dan mag je proberen zoveel mogelijk dobbelstenen met waarde S te gooien, tot je beurten 'op' zijn. Stel je hebt uiteindelijk x dobbelstenen met S ogen gegooid. De speler naast jou krijgt dan $N \times x$ boete.
- Als jij besluit voor een straat te gaan, en het lukt, krijgt iedereen 12 boete.

Het doel is nu een gooistrategie te bepalen, met minimale verwachte boete, onder de voorwaarde dat de andere spelers gezamenlijk in verwachting minstens x boete krijgen.

Het project kan uitgebreid worden met bijv. het volgende probleem.

6) Wat is het effect op de minimale verwachte boete bij toenemende 'drempel' waarde x?

En..experimenteel je resultaten testen op het Leidsche Flesch bestuur is aanbevelenswaardig!

Floske Spieksma
`spieksma@math.leidenuniv.nl`
Bachelorproject voor het AS&B seminarium
voorjaar 2015