TOETS LINEAIRE ALGEBRA 1 - 24 OKTOBER 2013

Motiveer steeds je antwoord. Veel succes!

Vraag 1. Laat V de vectorruimte over $\mathbb{R}$ zijn van alle oneindige rijtjes

$$(x_n)_{n\geq 0} = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$$

met elementen in $\mathbb{R}$, dus

$$V = \{(x_n)_{n\geq 0} \,:\, x_n \in \mathbb{R} \text{ voor alle } n \geq 0\},$$

met de gebruikelijke optelling en schaling, d.w.z. elementsgewijs. Beschouw de deelverzameling $S \subset V$ gegeven door

$$S = \{(x_n)_{n\geq 0} \in V \,:\, x_n + x_{n+2} = 0 \text{ voor alle } n \geq 0\}.$$

(a) Laat zien dat de nulrij $(0)_{n\geq 0}$ in S zit.
(b) Geef nog een voorbeeld van een ander element $(x_n)_{n\geq 0} \neq (0)_{n\geq 0}$ in S.
(c) Laat zien dat S een lineaire deelruimte is van V. Je hoeft niet te bewijzen dat V een vectorruimte is.

Vraag 2. Laat $a = (-1, 0, 2)$ en $v = (6, 3, -2)$ twee vectoren in $\mathbb{R}^3$ zijn.
(a) Schrijf v als de som van twee vectoren $v = v_1 + v_2$ waarbij v_1 een veelvoud is van a en v_2 loodrecht staat op a.
(b) Wat is de spiegeling (reflection) van v in het vlak $W \subset \mathbb{R}^3$ gegeven door

$$W = \{w \in \mathbb{R}^3 \,:\, \langle a, w\rangle = 5\}?$$

Vraag 3. Gegeven is de afbeelding $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) \mapsto (-x_2, -x_1)$. Dit betekent dat f de punten spiegelt in de lijn $x_2 = -x_1$.
(a) Laat zien dat f een $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding is.
(b) Wat is de matrix A die bij f hoort, dus zodat $f = f_A$?
(c) Is f injectief? Is f surjectief?

Laat $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de lineaire afbeelding zijn gegeven door $g(x_1, x_2) = (2x_1, x_2)$. Je hoeft niet te laten zien dat g een lineaire afbeelding is.
(d) Bereken de matrix B die hoort bij g, dus de matrix B zodat $f_B = g$.
(e) Bereken de matrix AB. Geldt dat $f \circ g = g \circ f$?

Vraag 4. Gegeven is de volgende 4×5 matrix A over $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de gereduceerde rij-echelonvorm van A.
(b) Vind een stel vectoren die de nulruimte (kernel) van A opspannen.
(c) Geef drie vectoren die de rijruimte van A opspannen.