De kubus van Rubik

Peter Bruin (pbruin@math.leidenuniv.nl)

11 maart 2004

De geschiedenis van de kubus begon in 1974 toen een Hongaarse docent architectuur, Ernő Rubik, zijn studenten vroeg een kubus bestaande uit 27 kleinere blokjes te bestuderen. Hij realiseerde zich dat het mogelijk was om met behulp van gekleurde blokjes een puzzel te maken waarbij de opgave was om de kubus door het draaien van de zijvlakken terug te krijgen in de beginpositie. In 1977 werd de kubus van Rubik op de markt gebracht in Hongarije, en vanaf 1981 begon er een gigantische Rubik-rage. Er zijn wereldwijd naar schatting meer dan 100 miljoen exemplaren van de kubus verkocht.

Semidirecte producten

Een onmisbaar gereedschap om de structuur van Rubik-achtige puzzels te bestuderen is het *semidirect product* (uitgelegd in het dictaat Algebra 1). Een groep G is het semidirect product van een normale ondergroep $N \triangleleft G$ en een ondergroep $H \subset G$, notatie $G = N \rtimes H$, als de ondergroep $NH := \{nh \mid n \in N, h \in H\}$ gelijk is aan G en $N \cap H = \{1\}$.

Het feit dat N een normale ondergroep is, betekent dat ${}^h n := hnh^{-1} \in N$ voor alle $n \in N$ en $h \in H$. We kunnen producten van elementen van de vorm nh met $n \in N$ en $h \in H$ ook weer in deze vorm schrijven:

$$(nh)(n'h') = (n \cdot hn'h^{-1})(hh') = (n \cdot {}^h n')(hh').$$

De $\mathbf{2 \times 2 \times 2}$-kubus

De $2 \times 2 \times 2$-kubus kunnen we beschrijven door één hoekblokje vast te houden en de zetten te bekijken als permutaties op de andere blokjes. Om te beginnen kijken we alleen naar de plaats van de blokjes en niet naar hun oriëntaties; het blijkt dat we met de basiszetten alle permutaties van deze 7 blokjes kunnen maken.

Als we ook naar de oriëntaties van de blokjes kijken, krijgen we een grotere groep. Deze groep is

$$P = N \rtimes S_7,$$

waarbij $N \subset (C_3)^7$ de ondergroep is van elementen $(a_1, a_2, \ldots, a_7)$ waarvoor $a_1 a_2 \cdots a_7 = 1$. De permutatiegroep S_7 werkt op N via permutaties van de elementen:

$${}^\sigma(a_1, a_2, \ldots, a_7) := (a_{\sigma^{-1}(1)}, a_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, a_{\sigma^{-1}(7)}).$$

Het aantal mogelijke posities van de kleine kubus is $3^7 \cdot 7!/3 = 3\,674\,160$.

De $\mathbf{3 \times 3 \times 3}$-kubus

Voor de 'gewone' $3 \times 3 \times 3$-kubus zijn er twee soorten blokjes: 8 hoekblokjes en 12 zijblokjes. De hoekblokjes kunnen drie oriëntaties hebben en de zijblokjes twee. De groep R van symmetrieën van de kubus van Rubik is een ondergroep van

$$(C_3^8 \rtimes S_8) \times (C_2^{12} \rtimes S_{12})$$

en bestaat uit de elementen $((a_1, \ldots, a_8), \sigma, (b_1, \ldots, b_{12}), \tau)$ waarvoor geldt dat $a_1 \cdots a_8 = 1$, $b_1 \cdots b_{12} = 1$ en $\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau) = 1$. Dit is een ondergroep van index 12, dus de kubus van Rubik heeft $(3^8 \cdot 8! \cdot 2^{12} \cdot 12!)/12 = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000$ posities. Deze groep heeft allerlei groepen die op andere plaatsen in de wiskunde voorkomen als ondergroepen.

Andere Rubik-achtige puzzels

Behalve de gewone kubus en de $2 \times 2 \times 2$-versie bestaan er ook $4 \times 4 \times 4$- en $5 \times 5 \times 5$-kubussen, *Rubik's Revenge* ($7{,}4 \cdot 10^{45}$ posities) en de *Professor's Cube* ($2{,}8 \cdot 10^{74}$ posities) genaamd. Verder zijn er allerlei niet-kubusvormige varianten, zoals de *diamant* (een regelmatig achtvlak), de *pyraminx* (een regelmatig viervlak) en de *megaminx* (een regelmatig twaalfvlak). De *skewb*, een kubus waarbij niet de vlakken maar de hoeken gedraaid worden, is gerelateerd aan de de pyraminx en de diamant.

Literatuur

- W.D. Joyner, *Lecture notes on the mathematics of the Rubik's cube*, http://web.usna.navy.mil/~wdj/rubik.html en verwijzingen op die pagina.
- J. Scherphuis, *Jaap's Puzzle Page*, http://www.geocities.com/jaapsch/puzzles/