Tentamen lineaire algebra 2
19 januari 2018, 10:00 – 13:00
zalen 312, 407/409, 412

Dit is *geen* openboektentamen. Alleen niet-programmeerbare rekenmachines zijn toegestaan. Bewijs je antwoorden. In totaal kun je 45 punten halen. Nummer je pagina's. Als je de antwoorden niet op de logische volgorde opschrijft, vermeld dan duidelijk waar welk antwoord staat.

Opgave 1. (8 punten) Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bepaal een orthogonale matrix Q en een diagonaalmatrix D zodanig dat er geldt $A = Q^\top DQ$.

Opgave 2. (10 punten) Zij n een positief geheel getal en A een reële $n \times n$ matrix. De volgende tabel bevat voor enkele deelruimtes van $\mathbf{R}^n$ de dimensie.

U	$\dim U$
$\ker A$	3
$\ker A^2$	3
$\operatorname{im} A^3$	8
$\ker(A - 2I_n)$	3
$\ker(A - 2I_n)^2$	6
$\ker(A - 2I_n)^3$	7
$\ker(A - 3I_n)^2$	1

(a) Bewijs dat er geldt $\ker A = \ker A^2 = \ker A^3$.
(b) Bewijs dat $n = 11$.
(c) Bewijs dat A een Jordan-normaalvorm heeft over $\mathbf{R}$.
(d) Bewijs dat de Jordan-normaalvorm, op de volgorde van de Jordanblokken na, uniek bepaald is door de informatie uit de tabel. Geef ook een Jordan-normaalvorm voor A.

Opgave 3. (9 punten) Zij $U \subset \mathbf{R}^6$ de lineaire deelruimte opgespannen door

$$u_1 = (0, 1, 0, 0, 0, 0),$$
$$u_2 = (0, 3, -2, 1, 2, 0),$$
$$u_3 = (1, -3, 1, -2, -1, -1).$$

(a) Bepaal een orthonormale basis voor U.
(b) Zij $\pi\colon \mathbf{R}^6 \to \mathbf{R}^6$ de orthogonale projectie op U (dat wil zeggen, als $v \in \mathbf{R}^6$ gelijk is aan $u + u'$ met $u \in U$ en $u' \in U^\perp$, dan is $\pi(v) = u$).
Zij A de matrix waarvoor voor alle $v \in \mathbf{R}^6$ geldt $\pi(v) = Av$.
Bewijs dat A symmetrisch is. [Hint: dit kan zonder berekeningen.]

Opgaven 4 en 5 staan op de volgende pagina

Opgave 4. (9 punten) Zij V een eindig-dimensionale inproductruimte.
Zij $f\colon V \to V$ een lineaire afbeelding waarvoor geldt $f \circ f = \mathrm{id}_V$.

(a) Laat zien dat f diagonaliseerbaar is.

(b) Laat zien dat als f zelfgeadjungeerd is, dat f dan een isometrie is.
[Het Engels voor *zelfgeadjungeerd* is *self adjoint*.]

Opgave 5. (9 punten) Zij V een eindig-dimensionale reële vectorruimte en $g\colon V \to V$ een lineaire afbeelding. Definieer de afbeelding $b\colon V \times V^* \to \mathbf{R}$ door $b(x, \varphi) = \varphi(g(x))$ voor $x \in V$ en $\varphi \in V^*$.

(a) Laat zien dat b bilineair is.

(b) Laat zien dat b niet-gedegenereerd is dan en slechts dan als g een isomorfisme is.