

Lineaire algebra 2: huiswerkset 4

Deadline: 14 december 2016, 0:01 uur (nacht voor het college)

(inleveren per email naar la2huiswerk@gmail.com)

(H4.1) Zij $V = \mathbf{C}^2$ en beschouw de afbeelding $\phi : V \times V \rightarrow \mathbf{C}$ gegeven door $\phi((z_1, z_2), (w_1, w_2)) = z_1 w_2 + z_2 w_1$.

1. Is ϕ bilineair? Is ϕ symmetrisch? Is ϕ anti-symmetrisch (skew-symmetric)? Is ϕ alternerend? Is ϕ niet-gedegeneerd? Motiveer je antwoorden.
2. Geef een basis v_1, v_2 van V zó dat geldt

$$\phi(v_i, v_j) = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{als } i = j, \\ 0 & \text{als } i \neq j. \end{cases}$$

(H4.2) Zij $V = \mathbf{R}^3$ en beschouw de symmetrische bilineaire vorm $\phi : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ die op de standaardbasis gegeven is door de matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Bereken de determinant van de matrix.
2. Is ϕ positief definit?
3. Bepaal de rang en de signatuur van ϕ .
4. Beantwoord dezelfde vragen voor de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(H4.3) Beschouw \mathbf{C}^3 met het Hermitesee standaardinproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle$, en zij $v \in \mathbf{C}^3$ en vector met $\langle v, v \rangle = 1$. Definiëer de lineaire afbeelding $f : \mathbf{C}^3 \rightarrow \mathbf{C}^3$ door $f(x) = x - i\langle x, v \rangle v$.

1. Laat zien dat de geadjungeerde (Engels: *adjoint*) van f gegeven is door $f^*(x) = x + i\langle x, v \rangle v$.
2. Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van f .
3. Laat zien dat f normaal is.
4. Is f een isometrie?

z.o.z.

(H4.4) Beschouw de kwadratische vorm $q : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ gegeven door

$$q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 3x^2 - 4xy.$$

1. Geef een symmetrische matrix A waarvoor geldt

$$q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (x \ y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

2. Vind $a, b \in \mathbf{R}$ en een orthogonale 2×2 -matrix C zó dat voor alle $u, v \in \mathbf{R}$ geldt

$$q\left(C \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = au^2 + bv^2.$$

3. Welke waarden neemt q aan op de eenheidscirkel in \mathbf{R}^2 ?