

Lineaire algebra 2: huiswerkset 4
(Secties 7 en 8)
Deadline: 18 november 2015, 9:00 uur

(H4.1) Zij V een *eindigdimensionale* vectorruimte over F , en zij $b : V \times V^* \rightarrow F$ een bilineaire afbeelding. Laat zien dat er een endomorfisme f van V bestaat zó dat voor alle $v \in V$ en $\phi \in V^*$ geldt

$$b(v, \phi) = \phi(f(v)).$$

(H4.2) Zij $V = \mathbf{C}^2$ en beschouw de afbeelding $\phi : V \times V \rightarrow \mathbf{C}$ gegeven door $\phi((z_1, z_2), (w_1, w_2)) = z_1 w_2 + z_2 w_1$.

1. Is ϕ bilineair? Is ϕ symmetrisch? Is ϕ anti-symmetrisch (skew-symmetric)? Is ϕ alternerend? Is ϕ niet-gedegeneerd? Motiveer je antwoorden.
2. Geef een basis v_1, v_2 van V zó dat geldt

$$\phi(v_i, v_j) = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{als } i = j, \\ 0 & \text{als } i \neq j. \end{cases}$$

(H4.3) Zij $V = \mathbf{R}^3$ en beschouw de symmetrische bilineaire vorm $\phi : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ die op de standaardbasis gegeven is door de matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Bereken de determinant van de matrix.
2. Is ϕ positief definit?
3. Bepaal de rang en de signatuur van ϕ .
4. Beantwoord dezelfde vragen voor de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$