

Uitwerkingen tentamen Lineaire Algebra 2
16 januari, 2015

Deze uitwerkingen zijn niet volledig, maar geven het idee van elke opgave aan. Voor een volledige oplossing moet alles ook nog duidelijk uitgewerkt worden.

Opgave 1 (10 punten). Beschouw de reële matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bepaal de Jordannormaalvorm van A , en een bijbehorende basistransformatie. Met andere woorden, geef een matrix J in Jordannormaalvorm en een inverteerbare matrix Q zodanig dat $J = Q^{-1}AQ$.
- (b) Vind een diagonaliseerbare matrix D en een nilpotente matrix N zodanig dat

$$B = D + N \quad \text{en} \quad ND = DN.$$

- (c) Bepaal B^{1000} .

Oplossing.

- (a) Het karakteristiek polynoom van A is $(t - 1)^2(t - 2)$. De eigenwaarden zijn dus 1 (met algebraïsche multipliciteit 2) en 2 (met algebraïsche multipliciteit 1). Bij het de eigenwaarde 2 hoort dus één Jordanblok, namelijk het (1×1) -blok (2). Voor eigenwaarde 1 kijken we naar de eigenruimte $E_1(A) = \ker(A - I)$. Omdat $A - I$ rang 2 heeft is deze kern 1-dimensionaal, dus er hoort bij eigenwaarde 1 maar één Jordanblok, dat dus gelijk is aan $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. We krijgen dus

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Voor een bijbehorende basistransformatie hebben we nodig drie vectoren v_1, v_2, v_3 met $v_3 \in E_2(A) = \ker(A - 2I)$ en $v_2 \in \ker(A - I)^2$ maar $v_2 \notin \ker(A - I)$ en $v_1 = (A - I)v_2$. Als je deze kernen uitrekt zie je dat je kunt nemen $v_2 = e_2 = (0, 1, 0)$ en dus $v_1 = (A - I)v_2 = -e_1 = (-1, 0, 0)$. De vector $v_3 = (0, 1, -1)$ brengt de kern van $A - 2I$ voort, dus we kunnen nemen

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

met de vectoren v_1, v_2, v_3 als kolommen.

- (b) Het karakteristiek polynoom van B is $(t+1)^2$, dus er is slechts één eigenwaarde: -1 . Nu kunnen net als in onderdeel (a) de Jordannormaalvorm bepalen, maar hier is een alternatieve methode. De Jordannormaalvorm J bestaat uit één (2×2) -Jordanblok of uit twee (1×1) -Jordanblokken.

[In het laatste geval zou de Jordannormaalvorm gelijk zijn aan $-I$, en zou er een inverteerbare matrix Q zijn met $B = Q \cdot (-I) \cdot Q^{-1} = -I$, wat niet het geval is. De Jordannormaalvorm is dus $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, maar dit hebben we niet eens nodig.]

Er is dus een inverteerbare Q met $B = Q^{-1}JQ$ en er geldt $J = -I + M$ met M nilpotent. Dus $B = Q^{-1} \cdot (-I) \cdot Q + Q^{-1} \cdot M \cdot Q = D + N$ met $D = -I$ diagonaal en $N = Q^{-1} \cdot M \cdot Q$ nilpotent. Er geldt inderdaad $DN = ND$. We hadden al $D = -I$ en vinden dus

$$N = B - D = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

- (c) Er geldt $N^2 = 0$. Omdat N en D commuteren geldt

$$\begin{aligned} B^{1000} &= (D + N)^{1000} = D^{1000} + 1000D^{999} \cdot N + (\text{termen die veelvoudig zijn van } N^2 = 0) \\ &= I - 1000N = \begin{pmatrix} -2999 & -9000 \\ 1000 & 3001 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Opgave 2 (9 punten). Zij A een reële 17×17 matrix en I de 17×17 identiteitsmatrix. Voor enkele waarden van λ en k is de rang van $(A - \lambda I)^k$ gegeven in de volgende tabellen.

M	$\text{rk}(M)$	M	$\text{rk}(M)$
$A - 3I$	14	$A - 2I$	14
$(A - 3I)^2$	12	$(A - 2I)^2$	11
$(A - 3I)^3$	10	$(A - 2I)^3$	11
$(A - 3I)^4$	10	$A - I$	13

- (a) Bepaal de Jordannormaalvorm van A .
 (b) Bepaal het karakteristiek polynoom van A .
 (c) Bepaal het minimum polynoom van A .

Oplossing.

- (a) Het is nuttiger om de dimensie van de kernen te kennen. Die zijn

M	$\dim \ker(M)$	M	$\dim \ker(M)$
$A - 3I$	3	$A - 2I$	3
$(A - 3I)^2$	5	$(A - 2I)^2$	6
$(A - 3I)^3$	7	$(A - 2I)^3$	6
$(A - 3I)^4$	7	$A - I$	4

Er zijn dus 3 blokken voor eigenwaarde 3, waarvan $5 - 3 = 2$ van grootte minstens 2 en $7 - 5 = 2$ van grootte minstens 3 en $7 - 7 = 0$ van grootte minstens 4. Dit

betekent twee van grootte 3 en nul van grootte 2 en één van grootte 1. De gegendeneraliseerde eigenruimte voor eigenwaarde 3 heeft dus dimensie 7. Voor eigenwaarde 2 vinden we net zo dat er drie blokken van grootte 2 zijn en geen andere blokken. De gegendeneraliseerde eigenruimte voor eigenwaarde 2 heeft dus dimensie 6. Er zijn vier blokken bij eigenwaarde 1. De gegendeneraliseerde eigenruimte voor eigenwaarde 1 heeft dus dimensie minstens 4 en hoogstens $17 - 7 - 6 = 4$, dus precies 4. Dat betekent dat de Jordannormaalvorm bestaat uit

- twee Jordan-blokken van grootte 3×3 bij eigenwaarde 3,
 - één Jordan-blok van grootte 1×1 bij eigenwaarde 3,
 - drie Jordan-blokken van grootte 2×2 bij eigenwaarde 2, en
 - vier Jordan-blokken van grootte 1×1 bij eigenwaarde 1.
- (b) Het karakteristiek polynoom van A is gelijk aan dat van zijn Jordannormaalvorm. Dat is een bovendriehoeksmatrix dus het karakteristiek polynoom is makkelijk te bepalen. Het is gelijk aan

$$(t - 3)^7(t - 2)^6(t - 1)^4.$$

- (c) In het minimum polynoom zitten de zelfde lineaire factoren met als exponent de lengte van het grootste Jordan-blok bij die eigenwaarde. We vinden dus

$$(t - 3)^3(t - 2)^2(t - 1).$$

Opgave 3 (9 punten). Beschouw de kwadratische vorm $q(x, y) = 5x^2 - 12xy - 4y^2$.

- (a) Bepaal een symmetrische matrix A zodanig dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt

$$q(x, y) = (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- (b) Bepaal een orthogonale matrix Q en een diagonaalmatrix D zodanig dat

$$D = Q^T A Q.$$

- (c) Bepaal twee reële getallen $a, b \in \mathbb{R}$ en een orthogonale afbeelding $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zodanig dat

$$q(f(u, v)) = au^2 + bv^2$$

voor alle $u, v \in \mathbb{R}$.

- (d) Welke waarden neemt $q(x, y)$ aan op de eenheidscirkel gegeven door $x^2 + y^2 = 1$?

Oplossing.

(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}.$

- (b) Zie Example 10.10 in het dictaat. De eigenwaarden van A zijn -7 en 8 . Bijbehorende eigenvectoren zijn $(1, 2)$ en $(2, -1)$. Na schalen krijgen we

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad D = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Inderdaad voldoen deze matrices aan $QQ^\top = I$ en $D = Q^\top A Q$.

- (c) Uit (b) volgt dat we kunnen nemen $a = -7$ en $b = 8$ en $f(z) = Qz$ voor $z \in \mathbb{R}^2$.
 (d) Omdat f orthogonaal is, beeldt het de eenheidscirkel af op de eenheidscirkel. We mogen dus ook de waarden van $-7u^2 + 8v^2$ bepalen op de eenheidscirkel $u^2 + v^2 = 1$. Omdat u^2 en v^2 niet-negatief zijn, krijgen we precies de waarden tussen -7 en 8 , waarbij -7 en 8 bereikt worden voor $(u, v) = (1, 0)$ en $(u, v) = (0, 1)$. Dus de bereikte waarden vormen het gesloten interval $[-7, 8]$.

Opgave 4 (10 punten). Zij V de vectorruimte van reële polynomen van graad hooguit 2. Definieer de afbeelding

$$\begin{aligned} \varphi: V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \int_0^1 f(x)g(x) dx. \end{aligned}$$

- (a) Laat zien dat φ een inproduct is.
 (b) Geef een orthogonale basis voor de inproductruimte V met dit inproduct.
 (c) Zij $T: V \rightarrow V$ de afbeelding gedefinieerd door $T(f) = f'$ waarbij f' de afgeleide is van f . Is T normaal?

Oplossing.

- (a) Elk van de drie eisen in Definition 9.1 is makkelijk te checken. Zie ook voorbeeld 9.3.
 (b) We beginnen met een basis $1, x, x^2$ en passen Gram-Schmidt toe. Omdat we alleen orthogonaliteit eisen en niet orthonormaliteit mogen we de normalisatiestap weglaten. We vinden dan de basis

$$f_1 = 1, \quad f_2 = x - \frac{1}{2}, \quad f_3 = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

- (c) We kunnen dit doen door Propositie 9.17 en Corollary 9.18 te gebruiken. Dat vergt een *orthonormale* basis! Maar in plaats van de basisvectoren uit (b) expliciet te schalen, is het voldoende te zeggen dat er niet-nul constanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zijn zodanig dat $B = (f_1, \alpha f_2, \beta f_3)$ een orthonormale basis is. Omdat er geldt $f_3' = f_2$ en $f_2' = f_1$ vinden we

$$A = [T]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta/\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deze matrix voldoet niet aan $AA^\top = A^\top A$ (schrijf dat uit!), dus A en daarmee T is niet normaal.

Er is ook een alternatieve methode die geen matrices gebruikt. De vraag is of voor elke f geldt $(T \circ T^*)(f) = (T^* \circ T)(f)$. Voor $f = 1$ geldt $T'(1) = 0$, dus $T^*(T(1)) = 0$. Het is dus voldoende om te laten zien dat $T(T^*(1)) \neq 0$, dus het is voldoende om te laten zien dat $T^*(1)$ niet een constante is. Dat volgt bijvoorbeeld uit het feit dat

$$\langle T^*(1), x \rangle = \langle 1, T(x) \rangle = \langle 1, 1 \rangle = 1.$$

Opgave 5 (7 punten). Zij V een eindig-dimensionale reële inproductruimte. Zij $f: V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding die voldoet aan

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

voor alle $v, w \in V$.

- (a) Bewijs dat f een isomorfisme en dus een isometrie is.
- (b) Bewijs dat voor de geadjungeerde (Engels: *adjoint*) f^* van f geldt:

$$f^* = f^{-1}.$$

[Volgens Propositie 9.15 uit het dictaat volgt dit direct uit het feit dat f een isometrie is. Dat mag je hier niet gebruiken, maar kun je wel zelf opnieuw bewijzen.]

Oplossing.

- (a) We bewijzen dat f injectief is: als $f(v) = 0$ voor een zekere $v \in V$, dan geldt $\langle v, v \rangle = \langle f(v), f(v) \rangle = \langle 0, 0 \rangle = 0$, dus $v = 0$. Dus is f inderdaad injectief. Het domein en het codomein van f zijn beide gelijk aan V en hebben dus de zelfde eindige dimensie. Dat impliceert dat f ook surjectief en dus een isomorfisme is.
- (b) Zie Proposition 9.15.