Tentamen Lineaire Algebra 1 (Wiskundigen)

Maandag, 4 januari 2010, 14.00-17.00

Geen rekenmachines. Motiveer elk antwoord.

(1) (a) Bepaal voor alle reële waarden van a de rang van de matrix

$$C_a = \begin{pmatrix} a & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Is C_a inverteerbaar voor $a = -2$? Zo nee, geef aan waarom niet; zo ja, geef de inverse.

(2) Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ het vlak dat het punt $(0, -1, 0)$ bevat en dat loodrecht staat op de vector $n = (1, 2, -2)$. Bereken de afstand van het punt $P = (3, 2, 1)$ tot V.

(3) Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Geef een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zodanig dat $A = PDP^{-1}$.

(b) Bereken A^n voor elk positief geheel getal n.

(4) De lineaire deelruimte $V \subset \mathbb{R}^4$ is gegeven door

$$\begin{aligned} 2x_1 \; -4x_2 \; +3x_3 \; +7x_4 &= 0, \\ x_1 \; -2x_2 \; +4x_3 \; -4x_4 &= 0, \\ 3x_1 \; -6x_2 \; +7x_3 \; +3x_4 &= 0. \end{aligned}$$

(a) Geef een basis voor V en een basis voor het orthogonale complement $V^\perp$ van V.

(b) Zij $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ de (orthogonale) projectie op V en zij E de standaardbasis voor $\mathbb{R}^4$. Bepaal de matrix $[T]_E^E$ die T beschrijft ten opzichte van basis E.
Je mag het antwoord, als je dat wilt, geven als product van matrices en inverses van matrices zonder dat product verder uit te werken, dus bijvoorbeeld als "$AB^{-1}C$" voor specifieke matrices A, B en C die je natuurlijk wel expliciet moet geven. (Hint: bepaal eerst een matrix die T beschrijft ten opzichte van een basis voor $\mathbb{R}^4$ bestaande uit een basis voor V en een basis voor $V^\perp$.)

Op de volgende pagina staan meer opgaven.

(5) Gegeven zijn een lichaam F en twee lineaire afbeeldingen

$$f, g\colon F^9 \to F^4.$$

Laat zien dat er een vector $v \in F^9$ is met $v \neq 0$ en

$$f(v) = g(v) = 0.$$

(Hint: wat zijn de dimensies van $\ker f$ en $\ker g$ minstens?)

(6) Zij $n \geq 1$ een geheel getal en laat P_n de vectorruimte zijn van alle polynomen met coëfficienten in $\mathbb{R}$ van graad ten hoogste n. Zij

$$D\colon P_n \to P_n$$

de lineaire afbeelding gedefinieerd door $D(f) = f'$, waarbij f' staat voor de afgeleide van f.

(a) Geef voortbrengers voor de kern van D.
(b) Wat is de rang van D?
(c) Laat zien dat $D^{n+1} = D \circ D \circ \cdots \circ D$ (de samenstelling van $n+1$ keer de afbeelding D) gelijk is aan de nulafbeelding (de afbeelding die alles naar 0 stuurt).
(d) Bewijs dat D precies één eigenwaarde λ heeft, namelijk $\lambda = 0$.
(e) Is D diagonaliseerbaar?

(7) WAAR of NIET WAAR? Geef korte uitleg als het WAAR is en een tegenvoorbeeld als het NIET WAAR is.

(a) Elke lineaire afbeelding $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heeft ten minste één eigenwaarde.
(b) Als $T\colon V \to V$ een injectieve lineaire afbeelding is en $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ zijn lineair onafhankelijk, dan zijn ook $T(v_1)$, $T(v_2)$, $T(v_3)$ en $T(v_4)$ lineair onafhankelijk.
(c) Als $T\colon V \to V$ een lineaire afbeelding is van een vectorruimte V naar zichzelf, dan is $T^{-1}(b)$ een lineaire deelruimte voor alle $b \in V$.
(d) Als een vierkante matrix A inverteerbaar is, dan is A diagonaliseerbaar.
(e) Als een vierkante matrix A diagonaliseerbaar is, dan is A inverteerbaar.