Uitwerkingen Lineaire Algebra I (wiskundigen)
22 januari, 2015

In deze uitwerkingen is hier en daar een berekening weggelaten (bijvoorbeeld het bepalen van de kern van een matrix) die uiteraard op het tentamen wel gegeven moest worden.

Opgave 1 (9 punten). Voor alle reële getallen $c \in \mathbb{R}$ definiëren we de matrix A_c als

$$A_c = \begin{pmatrix} 1 & c & 1 \\ 1-c & 2 & -2 \\ 2 & -1 & c+2 \end{pmatrix}$$

en we definiëren de afbeelding $g_c \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ door

$$g_c(x) = A_c \cdot x$$

voor alle $x \in \mathbb{R}^3$.

(a) Voor welke $c \in \mathbb{R}$ is g_c surjectief?
(b) Is A_c inverteerbaar voor $c = -2$? Zo nee, geef aan waarom niet; zo ja, geef de inverse.

Oplossing.

(a) De dimensies van het domein en het codomein van g_c zijn gelijk (namelijk 3), dus de afbeelding g_c is surjectief dan en slechts dan als die bijectief is en dan en slechts dan als de determinant ongelijk aan 0 is. De determinant is (op je tentamen moet je de berekening uiteraard ook laten zien)

$$c^3 + c^2 - 3c - 3 = (c+1)(c^2 - 3)$$

dus g_c is surjectief dan en slechts dan als $c \notin \{-1, \pm\sqrt{3}\}$.

(b) Uit (a) volgt al dat A_c inverteerbaar is voor $c = -2$. De inverse kunnen we vinden door de uitgebreide matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

te vegen tot gereduceerde rijtrapvorm. Dat geeft (op je tentamen moet je de berekening uiteraard ook laten zien)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 3 & -8 \end{array}\right),$$

dus de inverse is

$$(A_{-2})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -5 \\ 7 & 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

Opgave 2 (9 punten). Zij B de matrix

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal alle eigenwaarden van B en bepaal voor elke eigenwaarde een basis voor de bijbehorende eigenruimte.
(b) Bepaal een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix Q zodanig dat geldt

$$D = Q^{-1}BQ.$$

(c) Bereken B^{2015}. In je antwoord mag je uitdrukkingen zoals 17^{2015} laten staan.

Oplossing.

(a) Het karakteristiek polynoom van B is

$$\det(tI - B) = \begin{vmatrix} t-5 & 2 \\ -1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-5)(t-2) - (-1)\cdot(2) = t^2 - 7t + 12 = (t-3)(t-4).$$

De eigenwaarden zijn dus 3 en 4. De eigenruimte bij eigenwaarde 3 is

$$E_3(B) = \ker(B - 3I) = \ker \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Met behulp van de gereduceerde rijtrapvorm vinden we dat) deze kern wordt voortgebracht door de vector $v = \binom{1}{1}$, die dus een basis vormt voor $E_3(B)$.

De eigenruimte bij eigenwaarde 4 is

$$E_4(B) = \ker(B - 4I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(Met behulp van de gereduceerde rijtrapvorm vinden we dat) deze kern wordt voortgebracht door de vector $w = \binom{2}{1}$, die dus een basis vormt voor $E_4(B)$.

(b) We zetten de eigenvectoren v en w in die volgorde als kolommen in de matrix Q en krijgen

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Omdat v en w eigenvectoren van B zijn is $D = Q^{-1}BQ$ een diagonaalmatrix met op de diagonaal de bijbehorende eigenwaarden 3 en 4 (in die volgorde dus), dus

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(c) Er geldt $B = QDQ^{-1}$ dus $B^{2015} = QD^{2015}Q^{-1}$. Met

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad D = \begin{pmatrix} 3^{2015} & 0 \\ 0 & 4^{2015} \end{pmatrix}$$

reken je dan uit dat

$$B^{2015} = QD^{2015}Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{2015} & 0 \\ 0 & 4^{2015} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+2b & 2a-2b \\ -a+b & 2a-b \end{pmatrix}$$

met $a = 3^{2015}$ en $b = 4^{2015}$.

Opgave 3 (7 punten). Beschouw de reële matrix

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Geef voortbrengers voor $(\operatorname{im} C)^\perp$.

Oplossing. Het beeld $\operatorname{im} C$ is de kolomruimte van C, en wordt dus voortgebracht door de drie kolommen

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

De ruimte $(\operatorname{im} C)^\perp$ bestaat dus uit alle vectoren van $\mathbb{R}^4$ die loodrecht staan op deze drie vectoren v_1, v_2, v_3. Dat betekent dat $(\operatorname{im} C)^\perp$ gelijk is aan de kern van de matrix die v_1, v_2, v_3 als rijen heeft, dus $(\operatorname{im} C)^\perp$ is de kern van

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = C^\top.$$

(Met behulp van de gereduceerde rijtrapvorm vinden we dat) de kern wordt voortgebracht door de vector $(-2, 0, 2, 1)$.

Opgave 4 (12 punten). Zij V de reële vectorruimte van alle 3×3 magische vierkanten zoals we tijdens het college meerdere malen gezien hebben[1]. De magische vierkanten

$$M_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}\,, \qquad M_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \text{en} \qquad M_3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ \hline \end{array}$$

vormen een basis $B = (M_1, M_2, M_3)$ voor V. [Je mag dit zonder bewijs gebruiken.]
Zij $\rho\colon V \to V$ de lineaire afbeelding die elk magisch vierkant roteert over $90°$, dus ρ stuurt

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline d & e & f \\ \hline g & h & j \\ \hline \end{array} \qquad \text{naar} \qquad \begin{array}{|c|c|c|} \hline c & f & j \\ \hline b & e & h \\ \hline a & d & g \\ \hline \end{array}\,.$$

Zij $\gamma\colon V \to V$ de lineaire afbeelding die het magisch vierkant

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline d & e & f \\ \hline g & h & j \\ \hline \end{array} \qquad \text{stuurt naar} \qquad \begin{array}{|c|c|c|} \hline e & e & e \\ \hline e & e & e \\ \hline e & e & e \\ \hline \end{array}$$

en definieer $\sigma = \rho + \gamma$.

(a) Geef de matrices $[\rho]_B^B$, $[\gamma]_B^B$ en $[\sigma]_B^B$.
(b) Bepaal de karakteristieke polynomen van ρ, γ en σ.
(c) Bepaal een niet-nul eigenvector voor elk van de afbeeldingen ρ, γ en σ.
(d) Bepaal de rangen van ρ, γ en σ.
(e) Is σ diagonaliseerbaar?

[1] Dus V bestaat uit alle vierkanten van 3×3 reële getallen waarvan de drie rijen, de drie kolommen en de twee diagonalen allemaal dezelfde som hebben; de scalaire vermenigvuldiging en de optelling is componentsgewijs gedefinieerd.

Oplossing.

(a) De eerste kolom van $[\rho]_B^B$ is het rijtje van coëfficiënten van $\rho(M_1)$ ten opzichte van B. De tweede en derde kolommen zijn de rijtjes van coëfficiënten van $\rho(M_2)$ en $\rho(M_3)$. Omdat er geldt

$$\begin{aligned}\rho(M_1) &= M_1 = 1\cdot M_1 + 0\cdot M_2 + 0\cdot M_3,\\ \rho(M_2) &= M_3 = 0\cdot M_1 + 0\cdot M_2 + 1\cdot M_3,\\ \rho(M_3) &= -M_2 = 0\cdot M_1 + (-1)\cdot M_2 + 0\cdot M_3,\end{aligned}$$

vinden we

$$[\rho]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Net zo volgt uit $\gamma(M_1) = M_1$ en $\gamma(M_2) = \gamma(M_3) = 0$ dat

$$[\gamma]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Dan krijgen we ook

$$[\sigma]_B^B = [\rho]_B^B + [\gamma]_B^B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

(b) Het karakteristiek polynoom van een lineaire afbeelding $\varphi\colon V \to V$ is gelijk aan het karakteristieke polynoom van de matrix $[\varphi]_B^B$, dus aan $\det(tI - [\varphi]_B^B)$. Voor de afbeelding ρ vinden we

$$\begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0\\ 0 & t & 1\\ 0 & -1 & t\end{vmatrix} = (t-1)(t^2+1).$$

Net zo vinden we dat de karakteristieke polynomen van γ en σ gelijk zijn aan $t^2(t-1)$ en $(t-2)(t^2+1)$.

(c) Hier kun je een hele berekening doen om eigenvectoren te bepalen. Die moeten natuurlijk uiteindelijk wel elementen van V worden, dus magische vierkanten. Je kunt ook inzien dat we bij (a) al berekend hebben dat M_1 door elk van de drie afbeeldingen ρ, γ en σ op een veelvoud van zichzelf wordt afgebeeld. Immers, $\rho(M_1) = M_1$ en $\gamma(M_1) = M_1$ en $\sigma(M_1) = 2M_1$. Het magische vierkant M_1 is dus een eigenvector voor elk van de afbeeldingen met bijbehorende eigenwaarden respectievelijk 1, 1 en 2. Voor γ kun je ook eigenvectoren met eigenwaarde 0 geven, zoals M_2 of M_3.

(d) Hier kun je de rangen bepalen van de in (a) bepaalde matrices, maar je kunt het ook zonder die matrices doen. De afbeelding ρ is duidelijk bijectief (de inverse is rotatie over $-90°$), dus de rang is maximaal, namelijk 3. Het beeld van γ bestaat uit de veelvouden van M_1 en wordt dus voortgebracht door M_1 en heeft dus dimensie 1. Dus de rang van γ is 1. De afbeelding σ is ook bijectief: als je uit het magische vierkant $\sigma(M)$ met middelste getal $2e$ het magische vierkant M wil terugvinden, dan trek je er eerst eM_1 vanaf en daarna roteer je het over $-90°$ (of eerst roteren en daarna eM_1 aftrekken). Een andere manier om dit in te zien is als volgt. Neem $\tau = \rho^{-1} - \frac{1}{2}\gamma$. Omdat er geldt $\rho\circ\gamma = \gamma\circ\rho^{-1} = \gamma = \gamma\circ\gamma$, geldt er ook

$$\sigma\circ\tau = (\rho+\gamma)\circ(\rho^{-1} - \tfrac{1}{2}\gamma) = \rho\circ\rho^{-1} + \gamma\circ\rho^{-1} - \tfrac{1}{2}\rho\circ\gamma - \tfrac{1}{2}\gamma\circ\gamma = \mathrm{id}_V\,.$$

Dit impliceert dat σ injectief is, en omdat het domein en het codomein dezelfde dimensie hebben is het dus ook surjectief, dus de rang is 3 (en τ is de inverse van σ).

(e) Het karakteristiek polynoom van σ splitst niet in lineaire factoren, dus σ is niet diagonaliseerbaar.

Opgave 5 (8 punten). Stel V en W zijn eindig-dimensionale reële vectorruimtes. Neem aan dat

$$f\colon V \to W \qquad \text{en} \qquad g\colon W \to V$$

lineaire afbeeldingen zijn zodanig dat de samenstelling $g \circ f$ gelijk is aan de identiteit id_V op V, dus voor alle $v \in V$ geldt $g(f(v)) = v$. Bewijs dat het beeld van f (d.w.z. $\operatorname{im} f$) en de kern van g (d.w.z. $\ker g$) complementaire ruimtes in W zijn.

Oplossing. We willen bewijzen dat $\ker g \cap \operatorname{im} f = \{0\}$ en $\ker g + \operatorname{im} f = W$, want dat is wat het betekent om complementaire ruimtes te zijn.

We bewijzen eerst het eerste deel. Stel $w \in \ker g \cap \operatorname{im} f$. Wegens $w \in \operatorname{im} f$ bestaat er een v met $f(v) = w$ en wegens $w \in \ker g$ geldt $g(w) = 0$, dus $0 = g(w) = g(f(v)) = v$, dus $v = 0$ en dus $w = f(v) = 0$. We concluderen inderdaad $\ker g \cap \operatorname{im} f = \{0\}$.

Voor de gelijkheid $\ker g + \operatorname{im} f = W$ geven we twee bewijzen. Het eerste bewijs laat zien dat de eindig-dimensionaliteit niet nodig is. Stel $w \in W$ en schrijf $v = g(w)$. Voor $w' = f(v) \in \operatorname{im} f$ geldt $g(w') = g(f(v)) = v = g(w)$. Dus geldt $g(w - w') = 0$, dus voor $z = w - w'$ geldt $z \in \ker g$. Dus we vinden $w = w' + z \in \operatorname{im} f + \ker g$.

Voor het tweede bewijs van de gelijkheid $\ker g + \operatorname{im} f = W$ gebruiken we dat het voldoende is om te laten zien dat $\dim(\ker g + \operatorname{im} f) = \dim W$. Uit de identiteit $g \circ f = \mathrm{id}_V$ volgt dat f injecief en g surjectief is. Dus $\ker f = \{0\}$ en $\operatorname{im} g = V$. Wegens de dimensieformule voor lineaire afbeeldingen vinden we

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{im} f &= \dim V - \dim \ker f = \dim V - 0 = \dim V, \\ \dim \ker g &= \dim W - \dim \operatorname{im} g = \dim W - \dim V. \end{aligned}$$

De dimensieformule voor deelruimtes geeft dan

$$\dim(\ker g + \operatorname{im} f) = \dim \ker g + \dim \operatorname{im} f - \dim(\ker g \cap \operatorname{im} f) = (\dim W - \dim V) + \dim V - 0 = \dim W.$$

Dit impliceert zoals gezegd $\ker g + \operatorname{im} f = W$, dus $\ker g$ en $\operatorname{im} f$ zijn inderdaad compementaire ruimtes in W.