Lineaire algebra I (wiskundigen)

Hertentamen, maandag 7 maart, 2016

Geen rekenmachines, dictaat of aantekeningen. **Motiveer elk antwoord!**

Opgave 1 (7 punten). Voor elk reëel getal $a \in \mathbb{R}$ bekijken we het systeem

$$\begin{cases} ax_1 \qquad\quad + 3x_3 &= a \\ 2x_1 + ax_2 + 4x_3 &= 1 \\ \qquad -x_2 + 2x_3 &= a \end{cases}$$

van lineaire vergelijkingen in x_1, x_2 en x_3.

(a) Voor welke $a \in \mathbb{R}$ zijn er geen oplossingen?
(b) Beschrijf de volledige oplossingsverzameling voor $a = 1$.

Opgave 2 (8 punten). Gegeven is de matrix

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de eigenwaarden van M en een basis voor de bijbehorende eigenruimten.
(b) Bepaal een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix P zodanig dat $M = PDP^{-1}$.
(c) Bereken M^{2016}. [Je mag hierbij uitdrukkingen zoals 17^{2016} laten staan.]

Opgave 3 (7 punten). Zij $U \subset \mathbb{R}^3$ de lineaire deelruimte opgespannen door de vectoren

$$u_1 = (2, 1, 0), \qquad u_2 = (4, 1, 1) \qquad \text{en} \qquad u_3 = (0, 1, -1).$$

[Een ander woord voor ‘opgespannen’ is ‘voortgebracht’; Engels: ‘spanned’.]
Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ het vlak gegeven door

$$V = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 = 2x_2 + 2x_3 \}$$

en zij a een normaal van V. Geef een basis voor de doorsnede $U \cap (a^{\perp})$.

Op de volgende pagina staan nog meer opgaven

Opgave 4 (8 punten). Met behulp van de 2×3-matrix

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

definiëren we de lineaire afbeelding

$$T\colon \operatorname{Mat}(3 \times 2, \mathbb{R}) \to \operatorname{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$$

door $T(A) = NA$ voor alle $A \in \operatorname{Mat}(3 \times 2, \mathbb{R})$.

(a) Bepaal een basis voor de kern van T.

(b) Is T surjectief?

Opgave 5 (7 punten). Zij V de vectorruimte van alle reële polynomen van graad hooguit 2016. Stel $f_1\colon V \to \mathbb{R}^{2016}$ en $f_2\colon V \to \mathbb{R}^{2016}$ zijn twee lineaire afbeeldingen van V naar $\mathbb{R}^{2016}$. Bewijs dat er een niet-nul polynoom $p \in V$ bestaat waarvoor geldt $f_1(p) = f_2(p)$.

Opgave 6 (8 punten). Gegeven zijn twee elementen $a, b \in \mathbb{R}^{2016}$, beide ongelijk aan 0. Zij $f\colon \mathbb{R}^{2016} \to \mathbb{R}^{2016}$ de afbeelding gegeven door $f(x) = \langle a, x\rangle \cdot b$ voor alle $x \in \mathbb{R}^{2016}$.

(a) Laat zien dat er geldt $\dim(\ker f) = 2015$.

(b) Laat zien dat f diagonaliseerbaar is dan en slechts dan als a en b niet loodrecht op elkaar staan.