Lineaire algebra I (wiskundigen)

Voorbeelden van toetsopgaven, 2011

Uitwerkingen

(1) (a) Bepaal de afstand van het punt $Q = (1, 2, 2) \in \mathbb{R}^3$ tot het vlak gegeven door
$$2x + 2y - z = 1.$$
(b) Bepaal de hoek tussen de vectoren $(4, 2, -1, -2)$ en $(2, 0, 2, 1)$ in $\mathbb{R}^4$.

Uitwerking

(a) De vector $n = (2, 2, -1)$ is een normaal van het gegeven vlak en het vlak gaat door het punt $p = (0, 0, -1)$. We verschuiven alles over $-p$, zodat de afstand die we zoeken gelijk is aan de afstand van $q' = q - p = (1, 2, 3)$ tot het vlak gegeven door $\langle n, v\rangle = 0$ met $v = (x, y, z)$. De afstand van het punt q' tot dit nieuwe vlak is
$$\frac{|\langle q', n\rangle|}{\|n\|} = \frac{|\langle (1, 2, 3), (2, 2, -1)\rangle|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|2 + 4 - 3|}{3} = 1.$$
(b) Noem de vectoren v_1 en v_2. Noemen we de gevraagde hoek θ, dan geldt
$$\cos\theta = \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} = \frac{8 + 0 - 2 - 2}{5 \cdot 3} = \frac{4}{15},$$
dus geldt $\theta = \arccos(4/15)$.

(2) Zij V de vectorruimte over $\mathbb{R}$ van alle functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Je hoeft niet te laten zien dat V inderdaad een vectorruimte is. Definieer nu $U \subset V$ als de verzameling van alle functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f(n) = 0$ voor alle positieve gehele getallen n, dus
$$U = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{Z}_{>0} : f(n) = 0\}.$$
Laat zien dat U een deelruimte is van V.

Uitwerking

We gaan de drie eigenschappen van deelruimten na. Merk op dat het nulelement $0 \in V$ de functie $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is (hier noteren we f_0 voor het nulelement om verwarring te voorkomen) die alles op $0 \in \mathbb{R}$ afbeeldt. In het bijzonder geldt $f_0(n) = 0$ voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, dus $f_0 \in U$.

Stel dat f en g twee elementen van U zijn. Dan geldt dus voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ dat $f(n) = g(n) = 0$. In het bijzonder geldt ook
$$(f + g)(n) = f(n) + g(n) = 0 + 0 = 0$$
voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Hieruit zien we dat $f + g$ ook een element van U is.

Stel nu dat f een element van U is en $\lambda \in \mathbb{R}$. Per aanname geldt voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ dat $f(n) = 0$. Het volgt dat ook

$$(\lambda f)(n) = \lambda \cdot f(n) = \lambda \cdot 0 = 0$$

voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. We concluderen dat λf ook een element van U is. We hebben hiermee bewezen dat U voldoet aan de drie eigenschappen van een deelruimte, dus U is een deelruimte van V. $\square$

Alternatieve oplossing. Laat voor $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ de deelverzameling $U_n \subset V$ bestaan uit alle functies $f \in V$ waarvoor $f(n) = 0$. We hebben al eens bewezen dat elke U_n een deelruimte van V is. Maar U is gelijk aan de doorsnede $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} U_n$, en de doorsnede van deelruimten is weer een deelruimte. We concluderen dat U een deelruimte van V is.

Tweede alternatieve oplossing. We hebben $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Definieer de afbeelding $T \colon V = \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathrm{Map}(\mathbb{Z}_{>0}, \mathbb{R})$ die elke functie f stuurt naar de beperking van f tot de verzameling $\mathbb{Z}_{>0}$. Dan is T lineair en U is de kern van T en dus een lineaire deelruimte. $\square$

(3) Laat U_1 en U_2 deelruimtes zijn van een vectorruimte V. Bewijs dat de doorsnede $U_1 \cap U_2$ ook een deelruimte van V is.

Uitwerking Zie Lemma 5.7 uit het dictaat of 2.19 uit het dictaat van de toekomst.

(4) Waar of niet waar?
Geef een **korte** uitleg (hooguit twee regels).

(a) Zij V de vectorruimte van alle functies $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dan is de verzameling

$$\{f \in V \ : \ f(x) \geq 0 \text{ voor alle } x \in \mathbb{R}\}$$

een lineaire deelruimte.

(b) Zij V de vectorruimte van alle functies $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dan is de verzameling

$$\{f \in V \ : \ f(0) = 0 \text{ of } f \text{ is continu}\}$$

een lineaire deelruimte.

(c) Als v_1, v_2, v_3 voortbrengers zijn voor een vectorruimte V dan brengen

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1$$

ook V voort.

(d) Voor alle $r, s \in \mathbb{Q}$ is de verzameling

$$W_{r,s} = \{(w, x, y, z) \in \mathbb{Q}^4 \ : \ x + ry = r^2(z - w) + s\}.$$

een lineaire deelruimte van $\mathbb{Q}^4$ dan en slechts dan als $s = 0$.

(e) Zij V een vectorruimte met deelverzamelingen $S, T \subset V$. Dan geldt

$$L(S \cap T) = L(S) \cap L(T).$$

Uitwerking

(a) Niet waar. De functie f gegeven door $f(x) = x^2$ zit wel in V, maar $-1 \cdot f$ niet.

(b) Niet waar. Zij g de functie gegeven door $g(x) = 0$ voor $x \leq 0$ en $g(x) = 1$ voor $x > 0$. Dan zit g in V want $g(0) = 0$. Verder zit de constante functie 1 in V, want die is continu. Maar de som $g + 1$ van de twee functies zit niet in V.

(c) Niet waar. Stel bijvoorbeeld $V = \mathbb{R}$ over $\mathbb{R}$ met $v_1 = v_2 = v_3 = 1$. Dan brengen de elementen v_1, v_2, v_3 de vectorruimte $\mathbb{R}$ voort, maar de verschillen niet, want die zijn allemaal 0.

(d) Waar. Neem $a = (r^2, 1, r, -r^2)$. Dan is $W_{r,s}$ gelijk aan het hypervlak

$$\{v \in \mathbb{Q}^4 \ : \ \langle a, v \rangle = s\},$$

waarvan we al gezien hebben dat die een deelruimte is dan en slechts dan als $s = 0$. Zie Proposition 2.16 uit het dictaat van de toekomst.

(e) Niet waar. Neem $V = \mathbb{R}$ en $S = \{1\}$ en $T = \{2\}$. Dan geldt $S \cap T = \emptyset$, dus $L(S \cap T) = \{0\}$, while $L(S) \cap L(T) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

(5) Zij $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding en $U \subset W$ een deelruimte van W. Laat zien dat $f^{-1}(U)$ een deelruimte van V is.

Uitwerking We moeten drie dingen checken.

(1) <u>We moeten laten zien dat $0_V \in f^{-1}(U)$</u>. Omdat U een deelruimte is, geldt $0_W \in U$. Omdat f lineair is, geldt $f(0_V) = 0_W \in U$, dus $0_V \in f^{-1}(U)$.

(2) <u>We moeten laten zien dat voor alle $x, y \in f^{-1}(U)$ geldt $x + y \in f^{-1}(U)$.</u> Stel $x, y \in f^{-1}(U)$. Dan geldt dus $f(x), f(y) \in U$. Omdat U een deelruimte is, volgt $f(x) + f(y) \in U$. Omdat f lineair is, geldt ook $f(x + y) = f(x) + f(y) \in U$, dus $x + y \in f^{-1}(U)$.

(3) Zij F het lichaam waar V een vectorruimte over is. <u>We moeten laten zien dat voor alle $x \in f^{-1}(U)$ en alle $\lambda \in F$ geldt $\lambda x \in f^{-1}(U)$.</u> Stel $x \in f^{-1}(U)$ en $\lambda \in F$. Dan geldt $f(x) \in U$. Omdat U een deelruimte is, volgt ook $\lambda f(x) \in U$. Omdat f lineair is, geldt $f(\lambda x) = \lambda f(x) \in U$, dus $\lambda x \in f^{-1}(U)$.

We concluderen dat $f^{-1}(U)$ inderdaad een deelruimte is.

(6) Zij $s\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de spiegeling in het vlak gegeven door $2x - y + 3z = 0$. Bepaal een matrix A zodanig dat voor alle $v \in \mathbb{R}^3$ geldt $s(v) = Av$.

Uitwerking De kolommen van A zijn de beelden van de standaardvectoren e_1, e_2, e_3. De vector $a = (2, -1, 3)$ is een normaal van het vlak. Voor elke $v \in \mathbb{R}^3$ is de projectie van v op a gelijk aan λa met $\lambda = \langle v, a\rangle / \langle a, a\rangle$; de projectie van v op het vlak is gelijk aan $v - \lambda a$ en het spiegelbeeld van v in het vlak is $s(v) = v - 2\lambda a$.

Zo vinden we $s(e_1) = e_1 - \frac{2}{7}a$ en $s(e_2) = e_2 + \frac{1}{7}a$ en $s(e_3) = e_3 - \frac{3}{7}a$ en

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 2 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

(7) Is de volgende matrix inverteerbaar? Zo ja, bepaal de inverse.

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 6 \\ 2 & -2 & 5 & -1 \\ -1 & 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Uitwerking Zo erg als deze wordt de toets niet. Maar als je deze inverse goed had, dan zit het berekenen van inverses dus wel snor. De inverse is

$$\begin{pmatrix} -79 & 98 & 110 & 80 \\ 13 & -16 & -18 & -13 \\ 44 & -\frac{109}{2} & -61 & -\frac{89}{2} \\ 36 & -\frac{89}{2} & -50 & -\frac{73}{2} \end{pmatrix}.$$

(8) Breng de volgende matrix in row echelon form en bepaal voortbrengers voor de kern.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -5 & 2 \\ 2 & -2 & 5 & 9 & -1 \\ -1 & 5 & 0 & -9 & 6 \end{pmatrix}$$

Uitwerking De gereduceerde row echelon form is

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

en de kern wordt voortgebracht door de enkele vector

$$(2, 1, -2, 1, 1).$$

(9) Gegeven de vectoren

$$v_1 = (1, 2, -1, 3), \qquad v_2 = (3, 2, -2, 0), \qquad v_3 = (2, 0, -1, -3)$$

in $\mathbb{R}^4$. Zij $U \subset \mathbb{R}^4$ de deelruimte voortgebracht door v_1, v_2, en v_3. Bepaal voortbrengers voor $U^\perp \subset \mathbb{R}^4$.

Uitwerking

We zetten de vectoren als rijen in een matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dan is U gelijk aan de rijruimte van A en $U^\perp$ gelijk aan de kern van A. Om de kern te bepalen brengen we A eerst in row echelon form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De kern hiervan, en dus van A, wordt voortgebracht door

$$(6, 0, 9, 1) \qquad \text{en} \qquad (0, 3, 3, -1).$$