Bewijs voor lemma 6.21 in het dictaat van Michael Stoll.

Lemma. *Zij V een vectorruimte over een lichaam F met een reeks $v_1, v_2, \ldots, v_n$ van elementen in V. Als er voor elke $v \in V$ unieke scalairen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$ bestaan zodanig dat*

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

geldt, dan is $v_1, v_2, \ldots, v_n$ een basis voor de vectorruimte V.

Bewijs. Neem aan dat er voor elke $v \in V$ unieke scalairen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$ bestaan zodanig dat

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

geldt.

We moeten laten zien dat $v_1, \ldots, v_n$ een basis voor V is. Dit komt neer op de volgende twee eisen, per definitie:

(i) De vectoren $v_1, \ldots, v_n$ spannen V op, m.a.w. $L(v_1, \ldots, v_n) = V$.

(ii) De vectoren $v_1, \ldots, v_n$ zijn lineair onafhankelijk.

(i) We hebben ten eerste $L(v_1, \ldots, v_n) \subset V$, omdat V een vectorruimte is en dus is elke lineaire combinatie van vectoren in V weer een element van V. Daarnaast bestaan er voor elke $v \in V$ scalairen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$ zodanig dat $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ geldt, dus volgt $v \in L(v_1, \ldots, v_n)$. Omdat dit voor elke $v \in V$ geldt, hebben we $V \subset L(v_1, \ldots, v_n)$. Deze beide inclusies ($V \subset L(v_1, \ldots, v_n)$ en $L(v_1, \ldots, v_n) \subset V$) bewijzen $L(v_1, \ldots, v_n) = V$.

(ii) We weten dat $0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_n = 0$ geldt. Wegens de uniciteit van scalairen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$ waarvoor geldt $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, weten we dat als $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ geldt, er wel moet gelden $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. (Immers, dat setje scalairen voldoet en we hebben aangenomen dat er altijd maar één setje is dat voldoet.) Dit betekent dat $v_1, \ldots, v_n$ lineair onafhankelijk zijn.

Met (i) en (ii) is bewezen dat $v_1, \ldots, v_n$ een basis voor V is. $\square$