Huiswerk lineaire algebra voor 14 december, 2011 (laatste huiswerk!)

Je hoeft bij het toepassen van elementaire rij- of kolomoperaties niet de tussenstappen in je oplossingen te zetten (op het tentamen straks natuurlijk wel).

(1) In deze opgave gaan we voor de reële matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

matrices P en D bepalen met P inverteerbaar en D diagonaal, zodanig dat $A = PDP^{-1}$. In het algemeen kan dit niet voor elke vierkante matrix, maar als dat wel kan (zoals in dit geval), dan noemen we de matrix *diagonaliseerbaar*.

(a) Bepaal het karakteristiek polynoom $P_A(t) = \det(tI - A)$ van A.
(b) Bepaal alle eigenwaarden van A.
(c) Bepaal een basis voor de eigenruimte $\ker(\lambda I - A)$ voor elke eigenwaarde λ.
(d) Check dat de vereniging van de bases van de eigenruimtes, gevonden het vorige onderdeel van de opgave, een basis B geeft voor $\mathbb{R}^3$. (Dit is wat er voor algemene matrices mis kan gaan; het kan zijn dat er niet genoeg eigenvectoren zijn om een basis te vormen).
(e) Bepaal de matrix $D = [f_A]_B^B$.
(f) Bepaal de matrix $P = [\mathrm{id}]_E^B$.
(g) Bepaal de matrix $P^{-1} = ([\mathrm{id}]_E^B)^{-1} = [\mathrm{id}]_B^E$.
(h) Leg uit waarom geldt $[f_A]_E^E = A$.
(i) Wegens

$$[f_A]_E^E = [\mathrm{id}]_E^B \cdot [f_A]_B^B \cdot [\mathrm{id}]_B^E$$

geldt nu

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}.$$

Check dat dit inderdaad geldt.
(j) Geef voor elk niet-negatief geheel getal k een diagonaalmatrix D_k waarvoor geldt $A^k = PD_kP^{-1}$.
(k) Kun je hetzelfde doen voor negatieve k?

(2) Is de matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonaliseerbaar? Zo ja, geef matrices P en D met P inverteerbaar en D een diagonaalmatrix, zodanig dat $C = PDP^{-1}$; zo nee, waarom niet?

z.o.z.

(3) (a) Zij A een $m \times n$ matrix over een lichaam F en $b \in F^m$. Laat zien dat voor elke twee elementen $x, y \in F^n$ met $Ax = b = Ay$ geldt $x - y \in \ker A$.

(b) Zij A een $n \times n$ matrix over een lichaam F. Laat zien dat als $\det A \neq 0$, dan is er voor elke $b \in F^n$ precies één $x \in F^n$ met $Ax = b$.

(c) Voor elke $c \in \mathbb{R}$ beschouwen we het systeem van vergelijkingen

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x_1 & -x_2 & +cx_3 & = 0, \\ 2x_1 & +cx_2 & -4x_3 & = 2, \\ -x_1 & & +2x_3 & = -1 \end{array} \right.$$

over $\mathbb{R}$. Bepaal een 3×3 matrix A_c en een vector $b \in \mathbb{R}^3$ zodanig dat het systeem geschreven kan worden als $A_c \cdot x = b$ met $x = (x_1, x_2, x_3)$.

(d) Bereken $\det A_c$ (in termen van c).

(e) Voor welke c geldt $\operatorname{rk} A_c < 3$?

(f) Voor welke c is er precies één oplossing x?

(g) Voor welke c zijn er geen oplossingen?

(h) Voor welke c zijn er meerdere oplossingen?