Bij het college lineaire algebra 1, 23 november, 2011

Als V een vectorruimte over een lichaam F is met basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$, dan definiëren we de afbeelding

$$\varphi_B \colon F^n \to V, \qquad (a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n.$$

Omdat B een basis is, is φ_B een isomorfisme. De inverse $\varphi_B^{-1} \colon V \to F^n$ stuurt een element v naar het unieke rijtje van coëfficiënten $(a_1, \ldots, a_n)$ met $v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$. We schrijven ook wel

$$v_B = \varphi_B^{-1}(v)$$

en zeggen dat v_B het rijtje coëfficiënten van v ten opzichte van B is.

Zij nu V en W vectorruimtes over F met respectievelijk basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ en $C = (w_1, \ldots, w_m)$. Voor een vector $v \in V$ schrijven we dus v_B voor het rijtje coëfficiënten van v ten opzichte van B. Zo schrijven we voor $w \in W$ ook w_C voor het rijtje coëfficiënten van w ten opzichte van C.

Zij $T \colon V \to W$ een lineaire afbeelding. Dan is

$$\varphi_C^{-1} \circ T \circ \varphi_B \colon F^n \to F^m$$

een lineaire afbeelding, die dus gegeven wordt door een matrix, die we schrijven als $[T]_C^B$. Voor deze matrix $M = [T]_C^B$, geassocieerd aan de lineaire afbeelding T ten opzichte van B en C, geldt

$$M \cdot v_B = \big(T(v)\big)_C$$

voor alle $v \in V$. Met andere woorden, als $x = v_B = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in F^n$ de coëfficiënten zijn van de vector v ten opzichte van B (dus $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$), dan is $Mx = Mv_B$ de vector van coëfficiënten van $T(v)$ ten opzichte van C.

Door te kijken naar de basis elementen v_j van B, waarvoor geldt $(v_j)_B = e_j$, met e_j de j-de standaardbasisvector van F^n, vinden we dat de j-de kolom van M gelijk is aan $\big(T(v_j)\big)_C$, dus aan de rij van coëfficiënten van $T(v_j)$ ten opzichte van C.

Stel dat B' en C' ook bases zijn voor respectievelijk V en W. Uit het diagram

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[rrr, bend left, "T"] & V \arrow[r, "T"] & W \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & W \\
F^n \arrow[u, "\varphi_{B'}"] \arrow[r, "{[\mathrm{Id}]_B^{B'}}"'] \arrow[rrr, bend right, "{[T]_{C'}^{B'}}"'] & F^n \arrow[u, "\varphi_B"] \arrow[r, "{[T]_C^B}"'] & F^m \arrow[u, "\varphi_C"] \arrow[r, "{[\mathrm{Id}]_{C'}^C}"'] & F^m \arrow[u, "\varphi_{C'}"]
\end{tikzcd}$$

volgt dat er geldt

$$[T]_{C'}^{B'} = [\mathrm{Id}]_{C'}^{C} \cdot [T]_C^B \cdot [\mathrm{Id}]_B^{B'} = \big([\mathrm{Id}]_C^{C'}\big)^{-1} \cdot [T]_C^B \cdot [\mathrm{Id}]_B^{B'}.$$

Opgaven lineaire algebra, vrijdag 25 november, 2011

(1) Zij $T: V \to W$ een lineaire afbeelding van vectorruimtes over F en zij $B = (v_1, \ldots, v_n)$ en $C = (w_1, \ldots, w_m)$ bases van respectievelijk V en W. Maak de volgende zin af.

De matrix $[T]_C^B$ van T ten opzichte van B en C is de $\ldots \times \ldots$-matrix waarvan de j-de kolom gelijk is aan $\ldots$

Opmerking: De volgende uitspraak geldt ook.

De matrix $M = [T]_C^B$ van T ten opzichte van B en C is de $m \times n$-matrix waarvoor geldt dat als $x \in F^n$ het rijtje coëfficiënten is van een vector v ten opzichte van B, en $y = Mx$, dan is y het rijtje coëfficiënten van de vector $T(v)$ ten opzichte van C.

Met andere woorden:

Als $M = [T]_C^B$ de matrix van T ten opzichte van B en C is en voor $v = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n$ geldt $T(v) = y_1w_1 + \ldots + y_nw_m$, dan zijn $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en $y = (y_1, \ldots, y_m)$ gerelateerd door $y = Mx$.

(2) Zij $P_n(\mathbb{R})$ de vectorruimte van polynomen in x over $\mathbb{R}$ van graad ten hoogste n. Zij $T: P_4(\mathbb{R}) \to P_4(\mathbb{R})$ de afbeelding gegeven door $T(f) = 3f + (x-2)f''$. Geef de matrix $[T]_B^B$ van T ten opzichte van basis $B = (1, x, x^2, x^3, x^4)$.

(3) Zij $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ een basis voor de vectorruimte V over $\mathbb{R}$. Laat zien dat $B' = (v_1', v_2', v_3', v_4')$ met

$$\begin{aligned} v_1' &= v_1, \\ v_2' &= v_1 + 2v_2, \\ v_3' &= v_1 + 2v_2 + 3v_3, \\ v_4' &= v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4 \end{aligned}$$

ook een basis is voor V.

(a) Geef de matrices $M = [\mathrm{Id}]_B^{B'}$ en $N = [\mathrm{Id}]_{B'}^B$. (Welke is makkelijker te vinden?)

(b) Leg uit dat voor $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, de vector Mx gelijk is aan de rij van coëfficiënten ten opzichte van B van de vector $v = x_1v_1' + x_2v_2' + x_3v_3' + x_4v_4'$, waarvan x de rij van coëfficiënten ten opzichte van B' is.

(c) Leg uit dat voor $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, de vector Nx gelijk is aan de rij van coëfficiënten ten opzichte van B' van de vector $v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4$, waarvan x de rij van coëfficiënten ten opzichte van B is.

Opmerking: wegens (b) wordt M in de literatuur vaak de *overgangsmatrix van B' naar B* genoemd. Door er op een andere manier tegenaan te kijken wordt het (bijvoorbeeld in 14.3 van het dictaat) ook wel de *basisveranderingsmatrix geassocieerd aan de verandering van B naar B'* genoemd, precies andersom dus. Om deze verwarring te voorkomen onthouden wij gewoon wat de matrix doet, namelijk wat er bij (b) staat.

(4) Zij $B = (e_1, e_2, e_3)$ standaardbasis voor $\mathbb{R}^3$ en zij $B' = (v_1', v_2', v_3')$ de basis met

$$v_1' = (-1, -2, 0), \quad v_2' = (-2, 1, 3), \quad v_3' = (1, -1, -2).$$

Geef de matrices $[\mathrm{Id}]_B^{B'}$ en $[\mathrm{Id}]_{B'}^B$.

(5) Zij $E = (e_1, e_2, e_3)$ standaardbasis voor $\mathbb{R}^3$ en zij $B = (v_1, v_2, v_3)$ de basis met
$$v_1 = (-1, -2, 0), \quad v_2 = (-2, 1, 3), \quad v_3 = (1, -1, -2).$$
Geef de matrices $[\mathrm{Id}]_E^B$ en $[\mathrm{Id}]_B^E$. (Let op het verschil met de vorige opgave; het enige doel van deze opgave je in te laten zien dat je niet de notatie B en B' moet onthouden, maar de rol die ze spelen.)

(6) Zij $T\colon V \to W$ een lineaire afbeelding van vectorruimtes over F en zij $B = (v_1, \ldots, v_n)$ en $C = (w_1, \ldots, w_m)$ bases van respectievelijk V en W. Uit het diagram
$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[rrr, bend left, "T"] & V \arrow[r, "T"] & W \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & W \\
F^n \arrow[u, "\varphi_{B'}"] \arrow[r, "{[\mathrm{Id}]_B^{B'}}"'] \arrow[rrr, bend right, "{[T]_{C'}^{B'}}"'] & F^n \arrow[u, "\varphi_B"] \arrow[r, "{[T]_C^B}"'] & F^m \arrow[u, "\varphi_C"] \arrow[r, "{[\mathrm{Id}]_{C'}^C}"'] & F^m \arrow[u, "\varphi_{C'}"]
\end{tikzcd}$$
volgt dat er geldt
$$[T]_{C'}^{B'} = [\mathrm{Id}]_{C'}^{C} \cdot [T]_C^B \cdot [\mathrm{Id}]_B^{B'}.$$
Overtuig jezelf ervan dat dit ook volgt uit de beschrijving van $[T]_C^B$ in de opmerking van opgave 1.

(7) Zij E_2 en E_3 de standaardbases van $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$. Zij $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de afbeelding gegeven door
$$T\big((x, y)\big) \mapsto (3x + 2y, x - y, -x + 2y).$$
   (a) Geef de matrix $[T]_{E_3}^{E_2}$.
   (b) Geef de matrix $[T]_C^B$ voor de basis $B = \big((1, 2), (-1, 1)\big)$ van $\mathbb{R}^2$ en de basis $C = (v_1, v_2, v_3)$ van $\mathbb{R}^3$ met v_1, v_2, v_3 als in opgave 5. (hint: gebruik de vorige opgave)

(8) Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ de deelruimte opgespannen door v_1 en v_3 als in opgave 5. Dan is $B = (v_1, v_3)$ een basis voor V. Zij $T\colon V \to \mathbb{R}^3$ de inclusie. Zij E de standaardbasis voor $\mathbb{R}^3$. Zij C de basis voor $\mathbb{R}^3$ als in opgave 7.
   (a) Bepaal de matrices $[T]_E^B$ en $[T]_C^B$ direct.
   (b) Verifieer de gelijkheid die moet gelden tussen een van de matrices $[T]_E^B$ en $[T]_C^B$ enerzijds en het product van de ander met de matrix $[\mathrm{Id}]_E^C$ anderzijds.

(9) Zij $B = \big(1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3\big)$ een basis van $P_3(\mathbb{R})$. Zij $T\colon P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ de lineaire afbeelding gegeven door $T(f) = f'$. Bereken de matrix $[T]_B^B$ op twee manieren: (1) direct, en (2) door eerst de matrix ten opzichte van de basis $(1, x, x^2, x^3)$ te bepalen en daarna een overgangsmatrix te gebruiken.

(10) Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ het vlak gegeven door $x + 3y - 2z = 0$. Zij $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de orthogonale projectie van $\mathbb{R}^3$ op V. Zij B de standaardbasis voor $\mathbb{R}^3$. Bepaal $[\pi]_B^B$ op twee manieren: direct en via $[\pi]_C^C$, waarbij $C = (v_1, v_2, v_3)$ een basis is die bestaat uit een basis (v_1, v_2) voor V en een basis (v_3) voor $V^\perp$.

(11) Zij B en C de standaardbases van $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$. Zij $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de afbeelding gegeven door

$$T\big((x,y)\big) \mapsto (2x-3y, x+y, 3x+y).$$

(a) Geef de matrix $[T]_C^B$.

(b) Geef de matrix $[T]_{C'}^{B'}$ voor de basis $B' = \big((3,4),(1,-2)\big)$ van $\mathbb{R}^2$ en de basis $C' = (v_1, v_2, v_3)$ van $\mathbb{R}^3$ met

$$v_1 = (1,1,1), \qquad v_2 = (1,2,3), \qquad v_3 = (1,4,9).$$

(c) Laat zien dat voor de vector $v \in \mathbb{R}^2$ met $v_{B'} = (1,1)$ (dus $v = \varphi_{B'}((1,1))$) inderdaad geldt

$$[T]_{C'}^{B'} \cdot v_{B'} = \big(T(v)\big)_{C'}.$$

(d) Herhaal die verificatie voor nog een aantal $v_{B'}$, zoals onder andere $(1,0)$ en $(0,1)$.

(12) Zij V_1 de vectorruimte van 2×2 matrices over $\mathbb{R}$ en V_2 de vectorruimte van 3×2 matrices over $\mathbb{R}$ met bases respectievelijk

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

en

$$C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Zij $T\colon V_1 \to V_2$ de lineaire afbeelding gegeven door

$$T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot x.$$

Bepaal $[T]_C^B$.

(13) Zij $L \subset \mathbb{R}^2$ de lijn gegeven door $y = 2x$. Zij $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de orthogonale projectie van $\mathbb{R}^2$ op L.

(a) Bepaal $[T]_B^B$, waarbij B de standaardbasis is.

(b) Bepaal v_1 en v_2 zodanig dat (v_1) een basis is voor L en (v_2) een basis voor $L^\perp$. Zij $C = (v_1, v_2)$. Bepaal $[T]_C^C$.

(c) Bepaal $[T]_B^B$ nogmaals, dit keer met behulp van $[T]_C^C$ en een basisverandering.

Opmerking: Soms is het dus makkelijker om een lineaire afbeelding te beschrijven ten opzichte van een andere basis dan de standaardbasis. Met behulp van een basisverandering kun je het dan ook ten opzichte van de standaardbasis beschrijven.

(14) Bepaal het spoor van de volgende drie matrices.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & 5 & 11 \\ 3 & 2 & 7 & -13 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & 5 & 11 \\ 3 & 2 & 7 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 25 & 49 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 25 & 49 \end{pmatrix}$$