

Opgaven lineaire algebra, vrijdag 12 november, 2010

- (1) Welke van de volgende functies tussen vectorruimtes is een lineaire afbeelding?
- (a) $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x - 2y, z + 1)$,
 - (b) $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x^2, y^2, z^2)$,
 - (c) $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^4$, $(x, y, z) \mapsto (x + 2y, x - 3z, y - z, x + 2y + z)$,
 - (d) $\mathbb{R}^3 \rightarrow V$, $(x, y, z) \mapsto xv_1 + yv_2 + zv_3$, voor een vectorruimte V over \mathbb{R} met $v_1, v_2, v_3 \in V$,
 - (e) $P(\mathbb{C}) \rightarrow P(\mathbb{C})$, $f \mapsto f'$, waarbij $P(\mathbb{C})$ de vectorruimte van polynomen over \mathbb{C} is en f' de afgeleide van f ,
 - (f) $P(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f \mapsto (f(2), f'(0))$.

- (2) Zij $\rho: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de lineaire afbeelding gegeven door rotatie om de oorsprong $(0, 0)$ over de hoek θ .
- (a) Wat zijn de beelden $\rho((1, 0))$ en $\rho((0, 1))$?
 - (b) Laat zien dat er geldt

$$\rho((x, y)) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta).$$

- (3) Geef een expliciete uitdrukking voor de lineaire afbeelding $s: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die gegeven wordt door spiegeling in de lijn $y = -x$.

- (4) Gegeven is de afbeelding

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto x\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) + y\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

en de vectoren $v_1 = (2, 1)$ en $v_2 = (-1, 2)$.

- (a) Laat zien dat er geldt $T(v_1) = v_1$ en $T(v_2) = -v_2$.
 - (b) Laat zien dat de lineaire afbeelding gegeven door spiegeling in de lijn $2y - x = 0$ gelijk is aan T .
- (5) Geef een expliciete uitdrukking voor de lineaire afbeelding $s: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die gegeven wordt door spiegeling in de lijn $y = 3x$.

(6) Voor de gegeven matrix A en vector x , bereken Ax .

(a)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad x = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \\ -3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(7) Geef voor elk van de lineaire afbeeldingen $f: F^n \rightarrow F^m$ van de vorige pagina een matrix M zodat f gegeven wordt door

$$x \mapsto Mx.$$

(8) Gegeven de matrix

$$M = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

en de lineaire afbeelding $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto Mx$ for de bijbehorende m en n . Wat zijn m en n en wat zijn vectoren v_1, \dots, v_n zodanig dat f ook gegeven wordt door

$$f((x_1, x_2, \dots, x_n)) = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n?$$