Opgaven lineaire algebra, vrijdag 5 november, 2010

(1) Gegeven een deelruimte U van een vectorruimte V met $\dim U = m$ en $\dim V = n$, wat is de dimensie van elke complementaire deelruimte van U in V?

(2) Zij P_4 de vectorruimte van polynomen over $\mathbb{Q}$ van graad hooguit 4. Geef een complementaire deelruimte van de deelruimte $U = L(x-1, x+1, x^2-3x+2)$ in P_4.

(3) Zij U de deelruimte van $\mathbb{R}^4$ gegeven door

$$x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0.$$

Geef een complementaire deelruimte van U in $\mathbb{R}^4$.

(4) Zij U de deelruimte van $\mathbb{R}^3$ gegeven door

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \qquad \text{en} \qquad x_2 + x_3 = 0.$$

Geef een complementaire deelruimte van U in $\mathbb{R}^3$.

(5) Wat is de minimale dimensie van de doorsnede van twee deelruimtes $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^9$ waarvoor geldt $\dim U_1 = 5$ en $\dim U_2 = 7$?

(6) Gegeven een vectorruimte V van dimensie n en twee deelruimtes U_1 en U_2 met $U_1 \cap U_2 = (0)$. Bewijs dat als geldt $\dim U_1 + \dim U_2 \geq n$, dan geldt $\dim U_1 + \dim U_2 = n$ en $U_1 + U_2 = V$.

(7) Gegeven een verzameling $S \subset \mathbb{R}^n$, definieer de verzameling

$$S^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall s \in S : \langle s, v \rangle = 0\}$$

van alle elementen van $\mathbb{R}^n$ die loodrecht staan op alle elementen van S. Laat zien dat $S^\perp$ een deelruimte is van $\mathbb{R}^n$ en dat geldt $S \cap S^\perp \subset \{0\}$.

(8) **Gram-Schmidt orthogonalisatie**. Gegeven zijn m vectoren $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$. We definiëren m nieuwe vectoren $v_1', v_2', \ldots, v_m'$ door

$$\begin{aligned}
v_1' &= v_1, \\
v_2' &= v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1', \\
v_3' &= v_3 - \frac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' - \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2', \\
&\vdots \\
v_j' &= v_j - \frac{\langle v_j, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' - \ldots - \frac{\langle v_j, v_{j-1}' \rangle}{\langle v_{j-1}', v_{j-1}' \rangle} v_{j-1}', \\
&\vdots \\
v_m' &= v_m - \frac{\langle v_m, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' - \ldots - \frac{\langle v_m, v_{m-1}' \rangle}{\langle v_{m-1}', v_{m-1}' \rangle} v_{m-1}'.
\end{aligned}$$

(a) Laat zien dat
$$x = \frac{\langle v_j, v_r' \rangle}{\langle v_r', v_r' \rangle} v_r'$$
de projectie van v_j op v_r' is; m.a.w. $v_j - x$ staat loodrecht op v_r'.

(b) Laat zien dat v_i' en v_j' loodrecht op elkaar staan als $i \neq j$ (hint: neem $i < j$ en gebruik inductie naar j).

(c) Laat zien dat voor elke r met $1 \leq r \leq m$ geldt
$$L(v_1, \ldots, v_r) = L(v_1', \ldots, v_r').$$

(d) Laat zien dat als $v_1, \ldots, v_r$ onafhankelijk zijn, dan zijn $v_1', \ldots, v_r'$ ook lineair onafhankelijk (hint: gebruik de vorige stap en opgave 2 van vrijdag 9 oktober).

(e) Concludeer dat als $v_1, \ldots, v_m$ een basis is voor $\mathbb{R}^n$, dan is $v_1', \ldots, v_m'$ ook een basis. Opmerking: een basis voor $\mathbb{R}^n$ waarvan elke vector loodrecht op elke andere vector staat noemen we een *orthogonale basis*; nu weet je hoe je die uit een gegeven basis kunt maken.

(f) Definieer $v_i'' = \|v_i'\|^{-1} v_i'$. Laat zien dat als $v_1, \ldots, v_m$ een basis is voor $\mathbb{R}^n$, dan is $v_1'', \ldots, v_m''$ een orthogonale basis waarvan bovendien elke vector norm 1 heeft. Opmerking: We noemen zo'n basis een *orthonormale* basis.

(9) (Zie opgave 7 van vrijdag 9 oktober)

(a) Laat zien dat de vectoren
$$v_1 = (1,2,3,4), \quad v_2 = (1,1,1,1), \text{ and } v_3 = (1,1,0,-1)$$
in $\mathbb{R}^4$ lineair onafhankelijk zijn en breid (v_1, v_2, v_3) uit tot een basis (v_1, v_2, v_3, v_4) van $\mathbb{R}^4$.

(b) Pas Gram-Schmidt orthogonalisatie toe om een orthogonale basis (v_1', v_2', v_3', v_4') te krijgen.

(c) Definieer $U = L(v_1, v_2, v_3)$. Geef een orthogonale basis voor U en $U^\perp$ (zie opgave 7).

(10) Laat zien dat als $(v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s)$ een basis is voor $\mathbb{R}^n$ met $r + s = n$, dan zijn

$$U = L(v_1, \ldots, v_r) \qquad \text{en} \qquad U' = L(w_1, \ldots, w_s)$$

complementaire ruimtes. Laat zien dat als het een orthogonale basis is, dat dan geldt $U^\perp = U'$ (hint: gebruik opgave 7 en 8).

(11) Laat zien dat als U een deelruimte is van $\mathbb{R}^n$, dan is $U^\perp$ een complementaire deelruimte van U in $\mathbb{R}^n$ (hint: pas Gram-Schmidt orthogonalisatie toe en de vorige opgave).