Opgaven lineaire algebra, vrijdag 27 november, 2009

(1) Zij F een lichaam en m een vast positief geheel getal. Zij (als in Remark 12.2 van het dictaat) E_{ij} de $m \times m$ matrix over F met een 1 op rij i en kolom j en verder overal nullen. Voor $1 \leq i, j \leq m$ met $i \neq j$ en $\lambda \in F$ zetten we

$$\begin{aligned} L_{ij}(\lambda) &= I_m + \lambda E_{ij} \\ M_i(\lambda) &= I_m + (\lambda - 1)E_{ii} \\ N_{ij} &= I_m + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj} \end{aligned}$$

We noemen deze matrices *elementaire matrices.*

(a) Laat zien dat als A een $m \times n$ matrix is en M een elementaire matrix, dan is $A' = MA$ een matrix die je uit A kunt verkrijgen door een elementaire rijoperatie toe te passen.

(b) Concludeer dat als twee matrices A en A' rij-equivalent zijn, dan is er een inverteerbare matrix B zodanig dat $A' = BA$.

(c) Bewijs dat een matrix A inverteerbaar is, dan en slechts dan als A te schrijven is als het product van elementaire matrices.

(d) Schrijf de volgende matrices, als dit mogelijk is, als product van elementaire matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) Geef voor elk van de volgende stelsels vergelijkingen een matrix M en een vector b zodanig dat het stelsel equivalent is met de vergelijking $Mx = b$ in x. Geef daarna de algemene (geparametriseerde) oplossing.

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1+ & 3x_2+ & -2x_3 & = & 0 \\ 3x_1+ & 2x_2+ & 2x_3 & = & 0 \\ & -x_2+ & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1+ & 3x_2+ & -2x_3 & = & 1 \\ 3x_1+ & 2x_2+ & 2x_3 & = & -1 \\ & -x_2+ & 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1+ & 3x_2+ & -2x_3 & = & 1 \\ 3x_1+ & 2x_2+ & 2x_3 & = & 1 \\ & -x_2+ & 2x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrcr} 3x_1+ & x_2+ & 2x_3+ & -2x_4 & = & 1 \\ 2x_1+ & -x_2+ & 2x_3 & & = & 2 \\ x_1+ & & x_3 & & = & 3 \\ -2x_1+ & -x_2+ & -x_3+ & x_4 & = & 4 \end{array}$$

(3) Zij $T\colon V \to W$ een lineaire afbeelding van vectorruimtes over F en zij $B = (v_1, \ldots, v_n)$ en $C = (w_1, \ldots, w_m)$ bases van respectievelijk V en W. Maak de volgende zin af.

De matrix $[T]_C^B$ van T ten opzichte van B en C is de
$\ldots \times \ldots$-matrix waarvan de j-de kolom gelijk is aan $\ldots$

Opmerking: De volgende uitspraak geldt ook.

> De matrix $M = [T]_C^B$ van T ten opzichte van B en C is de $m \times n$-matrix waarvoor geldt dat als $x \in F^n$ het rijtje coëfficiënten is van de vector v ten opzichte van B, en $y = Mx$, dan is y het rijtje coëfficiënten van de vector $T(v)$ ten opzichte van C.

Met andere woorden:

> Als $M = [T]_C^B$ de matrix van T ten opzichte van B en C is en voor $v = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n$ geldt $T(v) = y_1w_1 + \ldots + y_nw_m$, dan zijn $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en $y = (y_1, \ldots, y_m)$ gerelateerd door $y = Mx$.

(4) Zij $P_n(\mathbb{R})$ de vectorruimte van polynomen in x over $\mathbb{R}$ van graad ten hoogste n. Zij $T\colon P_4(\mathbb{R}) \to P_4(\mathbb{R})$ de afbeelding gegeven door $T(f) = 3f+(x-2)f''$. Geef de matrix $[T]_B^B$ van T ten opzichte van basis $B = (1, x, x^2, x^3, x^4)$.

(5) Zij $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ een basis voor de vectorruimte V over $\mathbb{R}$. Laat zien dat $B' = (v_1', v_2', v_3', v_4')$ met

$$\begin{aligned} v_1' &= v_1, \\ v_2' &= v_1 + 2v_2, \\ v_3' &= v_1 + 2v_2 + 3v_3, \\ v_4' &= v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4 \end{aligned}$$

ook een basis is voor V.

(a) Geef de matrices $M = [\mathrm{Id}]_B^{B'}$ en $N = [\mathrm{Id}]_{B'}^B$. (Welke is makkelijker te vinden?)

(b) Leg uit dat voor $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, de vector Mx gelijk is aan de rij van coëfficiënten ten opzichte van B van de vector $v = x_1v_1'+x_2v_2'+x_3v_3'+x_4v_4'$, waarvan x de rij van coëfficiënten ten opzichte van B' is.

(c) Leg uit dat voor $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, de vector Nx gelijk is aan de rij van coëfficiënten ten opzichte van B' van de vector $v = x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4$, waarvan x de rij van coëfficiënten ten opzichte van B is.

Opmerking: wegens (b) wordt M in de literatuur vaak de *overgangsmatrix van B' naar B* genoemd. Door er op een andere manier tegenaan te kijken wordt het (bijvoorbeeld in 14.3 van het dictaat) ook wel de *basisveranderingsmatrix geassocieerd aan de verandering van B naar B'* genoemd, precies andersom dus. Om deze verwarring te voorkomen onthouden wij gewoon wat de matrix doet, namelijk wat er bij (b) staat.

(6) Zij $B = (e_1, e_2, e_3)$ standaardbasis voor $\mathbb{R}^3$ en zij $B' = (v_1', v_2', v_3')$ de basis met

$$v_1' = (-1, -2, 0), \quad v_2' = (-2, 1, 3), \quad v_3' = (1, -1, -2).$$

Geef de matrices $[\mathrm{Id}]_B^{B'}$ en $[\mathrm{Id}]_{B'}^B$.

(7) Zij $E = (e_1, e_2, e_3)$ standaardbasis voor $\mathbb{R}^3$ en zij $B = (v_1, v_2, v_3)$ de basis met

$$v_1 = (-1, -2, 0), \quad v_2 = (-2, 1, 3), \quad v_3 = (1, -1, -2).$$

Geef de matrices $[\mathrm{Id}]_E^B$ en $[\mathrm{Id}]_B^E$. (Let op het verschil met de vorige opgave; het enige doel van deze opgave je in te laten zien dat je niet de notatie B en B' moet onthouden, maar de rol die ze spelen.)

(8) Zij $T\colon V \to W$ een lineaire afbeelding van vectorruimtes over F en zij $B = (v_1, \ldots, v_n)$ en $C = (w_1, \ldots, w_m)$ bases van respectievelijk V en W. Uit het diagram

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[rrr, bend left, "T"] & V \arrow[r, "T"] & W \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & W \\
F^n \arrow[u, "\Phi_{B'}"] \arrow[r, "{[\mathrm{Id}]_B^{B'}}"'] \arrow[rrr, bend right, "{[T]_{C'}^{B'}}"'] & F^n \arrow[u, "\Phi_B"] \arrow[r, "{[T]_C^B}"'] & F^m \arrow[u, "\Phi_C"] \arrow[r, "{[\mathrm{Id}]_{C'}^C}"'] & F^m \arrow[u, "\Phi_{C'}"]
\end{tikzcd}$$

volgt dat er geldt

$$[T]_{C'}^{B'} = [\mathrm{Id}]_{C'}^C \cdot [T]_C^B \cdot [\mathrm{Id}]_B^{B'}.$$

Overtuig jezelf ervan dat dit ook volgt uit de beschrijving van $[T]_C^B$ in de opmerking van opgave 3.

(9) Zij E_2 en E_3 de standaardbases van $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$. Zij $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de afbeelding gegeven door

$$T\big((x, y)\big) \mapsto (3x + 2y, x - y, -x + 2y).$$

(a) Geef de matrix $[T]_{E_3}^{E_2}$.
(b) Geef de matrix $[T]_C^B$ voor de basis $B = \big((1, 2), (-1, 1)\big)$ van $\mathbb{R}^2$ en de basis $C = (v_1, v_2, v_3)$ van $\mathbb{R}^3$ met v_1, v_2, v_3 als in opgave 7. (hint: gebruik de vorige opgave)

(10) Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ de deelruimte opgespannen door v_1 en v_3 als in opgave 7. Dan is $B = (v_1, v_3)$ een basis voor V. Zij $T\colon V \to \mathbb{R}^3$ de inclusie. Zij E de standaardbasis voor $\mathbb{R}^3$. Zij C de basis voor $\mathbb{R}^3$ als in opgave 9.
(a) Bepaal de matrices $[T]_E^B$ en $[T]_C^B$ direct.
(b) Verifieer de gelijkheid die moet gelden tussen een van de matrices $[T]_E^B$ en $[T]_C^B$ enerzijds en het product van de ander met de matrix $[\mathrm{Id}]_E^C$ anderzijds.

(11) Zij $B = \big(1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3\big)$ een basis van $P_3(\mathbb{R})$. Zij $T\colon P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ de lineaire afbeelding gegeven door $T(f) = f'$. Bereken de matrix $[T]_B^B$ op twee manieren: (1) direct, en (2) door eerst de matrix ten opzichte van de basis $(1, x, x^2, x^3)$ te bepalen en daarna een overgangsmatrix te gebruiken.