Tweede huiswerkopdracht Lineaire algebra 1

September 28, 2010

Dit huiswerkexamen moet maandag 11 oktober, uitgewerkt in LaTeX, worden ingeleverd aan het begin van het college. Vergeet niet je naam en studentennummer op het materiaal te zetten dat je inlevert. Overleggen mag, maar je moet het zelf opschrijven. Kopiëren mag dus niet.

- **Opgave 1:** Zij S de verzameling van alle rijtjes $(a_n)_{n\geq 0}$ reëele getallen (dus $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$), die voldoen aan de relatie
$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$
voor alle $n \geq 0$. Laat zien dat de (componentsgewijze) som van twee rijtjes uit S weer in S ligt, en dat de (componentsgewijze) scalaire vermenigvuldiging van een rijtje uit S weer in S ligt. Laat zien dat S (met deze optelling, scalaire vermenigvuldiging en met het element $0 = (0, 0, 0, 0, \ldots)$) een reële vectorruimte is.

- **Opgave 2:** Stel dat $(V, +, \cdot, 0)$ een vectorruimte is. Bewijs, direct vanuit de acht eigenschappen voor een vectorruimte, dat als voor twee vectoren $x, y \in V$ geldt $x + y = y$, dan geldt $x = 0$.

- **Opgave 3:** Laat zien dat $\mathbb{R}$ een vectorruimte over $\mathbb{Q}$ is met de gebruikelijke optelling en (scalaire) vermenigvuldiging.

- **Opgave 4:** Zij V een vectorruimte over een lichaam F. Een deelverzameling $U \subset V$ heet een *deelruimte* van V als aan de volgende drie voorwaarden is voldaan.

  a) Er geldt $0 \in U$.
  b) Voor alle $x, y \in U$ geldt $x + y \in U$.
  c) Voor alle $\lambda \in F$ en alle $x \in U$ geldt $\lambda x \in U$.

  Laat zien dat elke deelruimte U van V zelf ook een vectorruimte over F is (met dezelfde optelling en scalaire vermenigvuldiging als V). Laat ook zien dat voor elke twee deelruimtes $U_1, U_2 \subset V$ de doorsnede $U_1 \cap U_2$ ook een deelruimte van V is.