

Lineaire algebra I (wiskundigen)

Toets, donderdag 22 oktober, 2009

Oplossingen

(1) Zij V het vlak in \mathbb{R}^3 door de punten

$$P_1 = (1, 2, 1), \quad P_2 = (0, 1, 1) \quad \text{en} \quad P_3 = (-1, 1, 3).$$

(a) Geef een parametrisatie voor V . Dat wil zeggen, vind vectoren p, v_1, v_2 zodanig dat geldt

$$V = \{p + sv_1 + tv_2 : s, t \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Geef een vergelijking voor V .

(c) Bepaal de afstand van het punt $Q = (1, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$ tot het vlak gegeven door

$$x + 2y - 3z = 1.$$

(d) Bepaal de hoek tussen de vectoren $(1, 2, 3, 4)$ en $(4, 3, 2, 1)$ in \mathbb{R}^4 .

Oplossing:

(a) De parametrisatie van V heeft de vorm

$$V = \{p + sv_1 + tv_2 : s, t \in \mathbb{R}\},$$

met $p \in \mathbb{R}^3$ een punt in het vlak en $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ twee onafhankelijke vectoren over het vlak (die hebben dus begin- en eindpunt in V). Een punt in het vlak is bijvoorbeeld

$$p = P_1 = (1, 2, 1).$$

Twee vectoren met begin- en eindpunt in het vlak kunnen we met P_1, P_2 en P_3 maken door

$$v_1 = P_2 - P_1 = (0, 1, 1) - (1, 2, 1) = (-1, -1, 0),$$

$$v_2 = P_3 - P_1 = (-1, 1, 3) - (1, 2, 1) = (-2, -1, 2).$$

Dat deze vectoren lineair onafhankelijk zijn zien we direct, want geen van de twee is een veelvoud van de ander. [Als v_1 en v_2 lineair *afhankelijk* waren geweest, dan hadden P_1, P_2 en P_3 op één lijn gelegen en geen vlak beschreven.] Een parametrisatie van V is dus

$$V = \{(1, 2, 1) + s(-1, -1, 0) + t(-2, -1, 2) : s, t \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Om een vergelijking op te stellen zoeken we eerst een normaalvector $n = (n_1, n_2, n_3)$ van V . Deze normaalvector moet loodrecht staan op v_1 en v_2 , dit zijn immers vectoren over het vlak. Er moet dus gelden

$$\langle n, v_1 \rangle = -n_1 - n_2 = 0 \quad \text{en} \quad \langle n, v_2 \rangle = -2n_1 - n_2 + 2n_3 = 0.$$

We zien dat $n = (2, -2, 1)$ hieraan voldoet. [Een andere manier om een normaalvector te vinden is met het uitproduct $v_1 \times v_2$.] Voor $v \in V$ geldt nu $\langle n, v \rangle = \langle n, p \rangle$, met p weer een punt in het vlak. We kunnen bijvoorbeeld $p = P_1$ nemen. Dan is

$$\langle n, v \rangle = \langle n, p \rangle = \langle (2, -2, 1), (1, 2, 1) \rangle = -1.$$

Schrijf $v = (x, y, z)$, dan vinden we voor V de vergelijking

$$2x - 2y + z = -1.$$

- (c) Een normaalvector van het gegeven vlak is $n = (1, 2, -3)$. [Dit zijn de coëfficiënten van respectievelijk x , y en z in de vergelijking.] Een punt in het vlak is bijvoorbeeld $P = (1, 0, 0)$. De afstand van Q tot het vlak is de lengte van de loodrechte projectie van $Q - P$ op de normaalvector n . Deze projectie is

$$\frac{\langle Q - P, n \rangle}{\langle n, n \rangle} n.$$

De lengte hiervan is

$$\begin{aligned} \frac{|\langle Q - P, n \rangle|}{\|n\|^2} \|n\| &= \frac{|\langle Q - P, n \rangle|}{\|n\|} \\ &= \frac{|\langle (0, 2, 1), (1, 2, -3) \rangle|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{1}{14} \sqrt{14}. \end{aligned}$$

- (d) De hoek θ tussen $(1, 2, 3, 4)$ en $(4, 3, 2, 1)$ is gedefiniëerd door

$$\cos \theta = \frac{\langle (1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1) \rangle}{\|(1, 2, 3, 4)\| \cdot \|(4, 3, 2, 1)\|} = \frac{20}{\sqrt{30}\sqrt{30}} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3},$$

dus $\theta = \cos^{-1}(\frac{2}{3})$. [Omdat dit geen mooie oplossing heeft, hoeft het niet anders geschreven te worden.]

- (2) Laat zien dat de vectoren

$$v_1 = (1, -1, 2, 0), \quad v_2 = (1, -1, -2, 0), \quad v_3 = (3, -2, 1, 4)$$

in \mathbb{R}^4 lineair onafhankelijk zijn en breid het rijtje (v_1, v_2, v_3) uit tot een basis voor \mathbb{R}^4 .

Oplossing:

Eerste oplossing. De vectoren v_1 , v_2 en v_3 zijn lineair onafhankelijk als voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ geldt: uit $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ volgt $a = b = c = 0$. Stel dus dat we $a, b, c \in \mathbb{R}$ hebben zodat $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$. In deze vergelijking staan links en rechts vectoren in \mathbb{R}^4 . Als we dit per component bekijken, krijgen we vier vergelijkingen in reële getallen:

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad & a + b + 3c = 0, \\ \text{(B)} \quad & -a - b - 2c = 0, \\ \text{(C)} \quad & 2a - 2b + c = 0, \\ \text{(D)} \quad & 4c = 0. \end{aligned}$$

Uit vergelijking (D) volgt $c = 0$. Als we dat invullen in (C), krijgen we $a = b$. Als we dat allemaal invullen in (B), vinden we $a = 0$ en dus ook $b = 0$. Dit bewijst dat v_1 , v_2 en v_3 lineair onafhankelijk zijn.

Voor een basis voor \mathbb{R}^4 hebben we vier lineair onafhankelijke vectoren nodig. Volgens de basisuitbreidingsstelling (stelling 6.9 in het dictaat) kunnen we (v_1, v_2, v_3) uitbreiden tot een basis door een geschikte vector van de basis $((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ toe te voegen. We proberen als eerste $(1, 0, 0, 0)$. Noem deze vector v_4 . We gaan bewijzen dat v_1 , v_2 , v_3 en v_4 lineair onafhankelijk zijn in \mathbb{R}^4 . Stel dat voor zekere

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ geldt: $av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4 = 0$. We bekijken dit weer per component:

$$\begin{aligned} (A') & a + b + 3c + d = 0, \\ (B') & -a - b - 2c = 0, \\ (C') & 2a - 2b + c = 0, \\ (D') & 4c = 0. \end{aligned}$$

Merk op dat (B'), (C') en (D') dezelfde vergelijkingen zijn als (B), (C) en (D). Omdat we hierboven (A) niet gebruikt hebben om af te leiden dat $a = b = c = 0$, kunnen we ook uit dit nieuwe stelsel direct concluderen dat $a = b = c = 0$. Als we dit vervolgens invullen in (A'), zien we dat ook $d = 0$. Dus de vier vectoren zijn lineair onafhankelijk en vormen daarom een basis voor \mathbb{R}^4 .

Opmerking: de keuze voor $(1, 0, 0, 0)$ als vierde vector is hier niet willekeurig: juist omdat we in het eerste stuk vergelijking (A) niet gebruikt hebben, is dit een handige keuze en zij we bij het tweede deel een stuk sneller klaar.

Tweede oplossing. We laten op dezelfde manier als in de eerste oplossing zien dat v_1, v_2 en v_3 lineair onafhankelijk zijn. We weten nu dat deze drie vectoren een deelruimte van dimensie 3 in \mathbb{R}^4 opspannen. Zo'n deelruimte kunnen we ook geven door één lineaire vergelijking, d.w.z. er zijn $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ zodat deze deelruimte gelijk is aan

$$\{ (x, y, z, w) \mid ax + by + cz + dw = 0 \}.$$

Deze a, b, c, d moeten we nog bepalen en wel op zo'n manier dat v_1, v_2 en v_3 aan de vergelijking voldoen. Merk op dat we, onafhankelijk van a, b, c altijd d zo kunnen kiezen dat v_3 aan de vergelijking voldoet, omdat de vierde component van v_1 en v_2 nul is. Omdat de eerste twee componenten van v_1 en v_2 gelijk zijn, zien we direct dat beide vectoren voldoen aan $x + y = 0$. We kiezen dus $a = 1, b = 1, c = 0$ en $d = -\frac{1}{4}$. Kortom, de vectorruimte opgespannen door v_1, v_2 en v_3 wordt gegeven door

$$\{ (x, y, z, w) \mid x + y - \frac{1}{4}w = 0 \}.$$

Om (v_1, v_2, v_3) tot een basis voor \mathbb{R}^4 uit te breiden, hebben we nu één vector nodig die niet in deze deelruimte zit. Bijvoorbeeld $(1, 0, 0, 0)$: deze voldoet niet aan $x + y - \frac{1}{4}w = 0$. Dus $(v_1, v_2, v_3, (1, 0, 0, 0))$ is een basis voor \mathbb{R}^4 .

Opmerking: er zijn nog veel meer vectoren die we als vierde basisvector hadden kunnen kiezen. In het bijzonder zien we aan de vergelijking direct dat van de vier eenheidsbasisvectoren alleen $(0, 0, 1, 0)$ niet voldoet.

- (3) Gegeven een vectorruimte V en twee lineaire deelruimtes U_1 en U_2 van V . Bewijs dat de doorsnede $U_1 \cap U_2$ weer een lineaire deelruimte is.

Oplossing: Dit is Lemma 5.6 uit het dictaat. Er zijn drie eisen te checken:

- Eis 1: "Er geldt $0 \in U_1 \cap U_2$." Dit geldt inderdaad, want we hebben $0 \in U_1$ en $0 \in U_2$ omdat U_1 en U_2 beide zelf deelruimtes zijn.
- Eis 2: "Voor alle $x, y \in U_1 \cap U_2$ geldt $x + y \in U_1 \cap U_2$." Stel $x, y \in U_1 \cap U_2$. Dan geldt $x, y \in U_1$ en $x, y \in U_2$ en omdat U_1 en U_2 beide

deelruimtes zijn, volgt ook $x + y \in U_1$ en $x + y \in U_2$. Hieruit volgt $x + y \in U_1 \cap U_2$, dus aan eis 2 is ook voldaan.

- Eis 3: “Voor alle $x \in U_1 \cap U_2$ en alle $\lambda \in F$ geldt $\lambda x \in U_1 \cap U_2$,” waarbij F het lichaam is waarover V een vectorruimte is. Stel $\lambda \in F$ en $x \in U_1 \cap U_2$. Dan geldt $x \in U_1$ en $x \in U_2$. Omdat U_1 en U_2 beide deelruimtes zijn, volgt ook $\lambda x \in U_1$ en $\lambda x \in U_2$. Hieruit volgt $\lambda x \in U_1 \cap U_2$, dus aan eis 3 is ook voldaan.

- (4) Gegeven een vectorruimte V en complementaire lineaire deelruimtes U_1 en U_2 van V . Met andere woorden, er geldt $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ en $U_1 + U_2 = V$. Laat zien dat er voor elke $v \in V$ unieke vectoren $u_1 \in U_1$ en $u_2 \in U_2$ zijn zodanig dat $v = u_1 + u_2$.

Oplossing: Dit is deel (2) van Lemma 6.25 uit het dictaat. Omdat er geldt $V = U_1 + U_2$ zijn er voor elke $v \in V$ elementen $u_1 \in U_1$ en $u_2 \in U_2$ met $v = u_1 + u_2$. Stel er zijn nog twee elementen $u'_1 \in U_1$ en $u'_2 \in U_2$ met $v = u'_1 + u'_2$. Dan geldt $u_1 + u_2 = v = u'_1 + u'_2$, en dus $u_1 - u'_1 = u'_2 - u_2$. Omdat er geldt $u_1 - u'_1 \in U_1$ en $u'_2 - u_2 \in U_2$, volgt $u_1 - u'_1 = u'_2 - u_2 \in U_1 \cap U_2 = \{0\}$, wat betekent dat $u_1 - u'_1 = u'_2 - u_2 = 0$. Hieruit volgt $u'_1 = u_1$ en $u'_2 = u_2$, dus zijn u_1 en u_2 inderdaad uniek.

- (5) Waar of niet waar?

Geef een tegenvoorbeeld of schets een **korte** uitleg (hooguit twee regels).

- (a) Zij V de vectorruimte van alle functies $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dan is de verzameling

$$\{f \in V : f(x) \geq 0 \text{ voor alle } x \in \mathbb{R}\}$$

een lineaire deelruimte.

- (b) Als (v_1, v_2, v_3) een basis is voor een vectorruimte V dan is

$$(v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1)$$

dat ook.

- (c) Als voor twee lineaire deelruimtes U en V van \mathbb{R}^9 geldt

$$\dim U = \dim V = 5,$$

dan bevat $U \cap V$ een vector $v \neq 0$.

- (d) In de vectorruimte van alle polynomen over \mathbb{Q} zijn de zes polynomen

$$\begin{aligned} &x + 1, \\ &x - 2, \\ &x^2 - 3x + 2, \\ &x^3 - x, \\ &x^3 + x^2 + x - 3, \\ &x^4 + x^2 + 1 \end{aligned}$$

lineair afhankelijk.

- (e) Voor alle $r, s \in \mathbb{Q}$ is de verzameling

$$W_{r,s} = \{(w, x, y, z) \in \mathbb{Q}^4 : x + ry = r^2(z - w) + s\}.$$

een lineaire deelruimte van \mathbb{Q}^4 dan en slechts dan als $s = 0$.

Oplossing:

- (a) Niet waar. De functie f gedefinieerd door $f(x) = 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, is een element van de verzameling, maar $-1 \cdot f$ is geen element van de verzameling. De verzameling is dus niet gesloten onder scalaire vermenigvuldiging.

- (b) Niet waar. Voor alle drietallen vectoren (v_1, v_2, v_3) geldt

$$(v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + (v_3 - v_1) = 0,$$

en dat is een niet-triviale lineaire combinatie van $v_1 - v_2$, $v_2 - v_3$ en $v_3 - v_1$ die nul oplevert. De drie vectoren zijn dus niet lineair onafhankelijk.

- (c) Waar. Door stelling 6.22 toe te passen, zien we dat

$$\dim(U + V) + \dim(U \cap V) = 5 + 5 = 10.$$

Verder is $U + V$ een deelruimte van \mathbb{R}^9 , dus $\dim(U + V) \leq 9$. Hieruit volgt $\dim(U \cap V) \geq 1$. Een deelruimte van dimensie 1 bevat altijd een vector ongelijk aan 0.

- (d) Waar. De genoemde zes polynomen zitten allemaal in de deelruimte van polynomen over \mathbb{Q} van graad hoogstens 4. Deze deelruimte heeft dimensie 5 en dus zijn elke zes vectoren in deze ruimte lineair afhankelijk.
- (e) Waar. Stel dat $W_{r,s}$ een lineaire deelruimte is. Dan is 0 een element van $W_{r,s}$, dus $0 + r \cdot 0 = r^2 \cdot (0 - 0) + s$, waaruit volgt $s = 0$. Stel andersom dat $s = 0$. Dan is gemakkelijk na te gaan dat aan alle axioma's voor een lineaire deelruimte voldaan zijn.