Polynomen

Het is belangrijk het verschil in te zien tussen *polynomen* en *polynomiale functies*.

Een polynomiale functie is, zoals de naam al suggereert, een functie. In Example 5.12 van het dictaat worden polynomiale functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ gedefinieerd als lineaire combinaties van de machtsfuncties $f_n \colon x \mapsto x^n$, waarbij n een niet-negatief geheel getal is. Elke polynomiale functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ is dus van de vorm

$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

voor zekere $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Natuurlijk staat niets ons in de weg om de coefficienten uit een willekeurig lichaam F te nemen. Elke polynomiale functie van F naar F is dus van de vorm

$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

voor zekere $a_0, a_1, \ldots, a_n \in F$.

Nu krijgen we wel met iets subtiels te maken. Als bijvoorbeeld het lichaam F slechts twee elementen heeft, dus $F = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, dan zijn de *functies* $x \mapsto x$ en $x \mapsto x^2$ hetzelfde, want $0^n = 0$ en $1^n = 1$ voor elk geheel getal $n > 0$.

Als we het hebben over *polynomen* in x, dan is x een formeel symbool, ook wel *transcendent* genoemd, waarvan we de formele machten (dus $1 = x^0, x = x^1, x^2, x^3, \ldots$) *monomen* noemen. Een polynoom in x over het lichaam F is dan een F-lineaire combinatie van monomen. Elk polynoom in x over F is dus van de vorm

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Polynomen kun je optellen door ze coëfficiëntsgewijs op te tellen, precies zoals je zou verwachten. Je kunt polynomen ook met een scalar vermenigvuldigen door dat coëfficiëntsgewijs te doen, weer precies zoals je zou verwachten. Er geldt dus

$$(x^5 - x^3 + x + 2) - 2(x^3 - x^2 - 1) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 + x + 4.$$

Een ander woord voor “polynoom” is “veelterm.” Polynomen zijn dus niets anders dan formele sommen. Het polynoom x^2 is dan ook een ander polynoom dan x, zelfs als het grondlichaam $\mathbb{F}_2$ is.

Natuurlijk hebben de polynomen wel veel met polynomiale functies te maken. Bij elk polynoom f in x over een lichaam F kun je polynomiale functie definiëren, namelijk

$$z \mapsto f(z),$$

waarbij je $f(z)$ krijgt door z voor x te substitueren.

Er zijn dus soms verschillende polynomen (bijvoorbeeld x en x^2 over $\mathbb{F}_2$) die op deze manier dezelfde polynomiale functie geven.