

Opgaven lineaire algebra, vrijdag 16 oktober, 2009

- (1) Opgaven van vorige week.
- (2) Gegeven een deelruimte U van een vectorruimte V met $\dim U = m$ en $\dim V = n$, wat is de dimensie van elke complementaire deelruimte van U in V ?
- (3) Zij P_4 de vectorruimte van polynomen over \mathbb{Q} van graad hooguit 4. Geef een complementaire deelruimte van de deelruimte $U = L(x-1, x+1, x^2-3x+2)$ in P_4 .
- (4) Zij U de deelruimte van \mathbb{R}^4 gegeven door

$$x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0.$$

Geef een complementaire deelruimte van U in \mathbb{R}^4 .

- (5) Zij U de deelruimte van \mathbb{R}^3 gegeven door

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \quad \text{en} \quad x_2 + x_3 = 0.$$

Geef een complementaire deelruimte van U in \mathbb{R}^3 .

- (6) Wat is de minimale dimensie van de doorsnede van twee deelruimtes $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^9$ waarvoor geldt $\dim U_1 = 5$ en $\dim U_2 = 7$?
- (7) Gegeven een vectorruimte V van dimensie n en twee deelruimtes U_1 en U_2 met $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Bewijs dat als geldt $\dim U_1 + \dim U_2 \geq n$, dan geldt $\dim U_1 + \dim U_2 = n$ en $U_1 + U_2 = V$.
- (8) Gegeven een verzameling $S \subset \mathbb{R}^n$, definieer de verzameling

$$S^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall s \in S : \langle s, v \rangle = 0\}$$

van alle elementen van \mathbb{R}^n die loodrecht staan op alle elementen van S . Laat zien dat S^\perp een deelruimte is van \mathbb{R}^n en dat geldt $S \cap S^\perp \subset \{0\}$.

- (9) **Gram-Schmidt orthogonalisatie.** Gegeven zijn m vectoren $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$. We definiëren m nieuwe vectoren v'_1, v'_2, \dots, v'_m door

$$\begin{aligned} v'_1 &= v_1, \\ v'_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1, \\ v'_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1 - \frac{\langle v_3, v'_2 \rangle}{\langle v'_2, v'_2 \rangle} v'_2, \\ &\vdots \\ v'_j &= v_j - \frac{\langle v_j, v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1 - \dots - \frac{\langle v_j, v'_{j-1} \rangle}{\langle v'_{j-1}, v'_{j-1} \rangle} v'_{j-1}, \\ &\vdots \\ v'_m &= v_m - \frac{\langle v_m, v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1 - \dots - \frac{\langle v_m, v'_{m-1} \rangle}{\langle v'_{m-1}, v'_{m-1} \rangle} v'_{m-1}. \end{aligned}$$

- (a) Laat zien dat

$$x = \frac{\langle v_j, v'_r \rangle}{\langle v'_r, v'_r \rangle} v'_r$$

de projectie van v_j op v'_r is; m.a.w. $v_j - x$ staat loodrecht op v'_r .

- (b) Laat zien dat v'_i en v'_j loodrecht op elkaar staan als $i \neq j$ (hint: neem $i < j$ en gebruik inductie naar j).
 (c) Laat zien dat voor elke r met $1 \leq r \leq m$ geldt

$$L(v_1, \dots, v_r) = L(v'_1, \dots, v'_r).$$

- (d) Laat zien dat als v_1, \dots, v_r onafhankelijk zijn, dan zijn v'_1, \dots, v'_r ook lineair onafhankelijk (hint: gebruik de vorige stap en opgave 2 van vrijdag 9 oktober).
 (e) Concludeer dat als v_1, \dots, v_m een basis is voor \mathbb{R}^n , dan is v'_1, \dots, v'_m ook een basis. Opmerking: een basis voor \mathbb{R}^n waarvan elke vector loodrecht op elke andere vector staat noemen we een *orthogonale basis*; nu weet je hoe je die uit een gegeven basis kunt maken.
 (f) Definieer $v''_i = \|v'_i\|^{-1} v'_i$. Laat zien dat als v_1, \dots, v_m een basis is voor \mathbb{R}^n , dan is v''_1, \dots, v''_m een orthogonale basis waarvan bovendien elke vector norm 1 heeft. Opmerking: We noemen zo'n basis een *orthonormale basis*.

- (10) (Zie opgave 7 van vrijdag 9 oktober)

- (a) Laat zien dat de vectoren

$$v_1 = (1, 2, 3, 4), \quad v_2 = (1, 1, 1, 1), \quad \text{and} \quad v_3 = (1, 1, 0, -1)$$

in \mathbb{R}^4 lineair onafhankelijk zijn en breid (v_1, v_2, v_3) uit tot een basis (v_1, v_2, v_3, v_4) van \mathbb{R}^4 .

- (b) Pas Gram-Schmidt orthogonalisatie toe om een orthogonale basis (v'_1, v'_2, v'_3, v'_4) te krijgen.

(c) Definieer $U = L(v_1, v_2, v_3)$. Geef een orthogonale basis voor U en U^\perp (zie opgave 7).

(11) Laat zien dat als $(v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s)$ een basis is voor \mathbb{R}^n met $r + s = n$, dan zijn

$$U = L(v_1, \dots, v_r) \quad \text{en} \quad U' = L(w_1, \dots, w_s)$$

complementaire ruimtes. Laat zien dat als het een orthogonale basis is, dat dan geldt $U^\perp = U'$ (hint: gebruik opgave 7 en 8).

(12) Laat zien dat als U een deelruimte is van \mathbb{R}^n , dan is U^\perp een complementaire deelruimte van U in \mathbb{R}^n (hint: pas Gram-Schmidt orthogonalisatie toe en de vorige opgave).