Lineaire Algebra - Huiswerk 4
Uitwerkingen

27 november, opgave 10

Laat $C = (v_1, v_2, v_3)$ met

$$v_1 = (-1, -2, 0), \quad v_2 = (-2, 1, 3), \quad v_3 = (1, -1, -2)$$

een basis voor $\mathbb{R}^3$ zijn, en $V \subset \mathbb{R}^3$ de deelruimte opgespannen door v_1 en v_3, met basis $B = (v_1, v_3)$. Zij $T : V \to \mathbb{R}^3$ de inclusie. Zij E de standaardbasis voor $\mathbb{R}^3$.

a. Bepaal de matrices $[T]^B_E$ en $[T]^B_C$ direct.

Uitwerking.

Om $[T]^B_E$ te bepalen, moeten we het beeld van T op de basisvectoren in B weten, uitgedrukt in de basis E. Dus:

$$T(v_1) = v_1 = (-1, -2, 0) = -1 \cdot e_1 - 2 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3,$$
$$T(v_3) = v_3 = (1, -1, -2) = 1 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 - 2 \cdot e_3.$$

Er volgt

$$[T]^B_E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Evenzo, om $[T]^B_C$ te bepalen, moeten we het beeld van T op de basisvectoren in B weten, maar nu uitgedrukt in de basis C. Dus:

$$T(v_1) = v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3,$$
$$T(v_3) = v_3 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3.$$

Er volgt

$$[T]^B_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. Verifiëer de gelijkheid die moet gelden tussen een van de matrices $[T]^B_E$ en $[T]^B_C$ enerzijds en het product van de ander met de matrix $[\mathrm{Id}]^C_E$ anderzijds.

Uitwerking.

De gelijkheid die moet gelden is

$$[T]^B_E = [\mathrm{Id}]^C_E \cdot [T]^B_C.$$

Namelijk: het resultaat van $[T]^B_C$ is een rijtje coëfficiënten die een vector in V uitdrukt ten opzichte van de basis C. De basistransformatie $[\mathrm{Id}]^C_E$ neemt precies zo'n rijtje als invoer en geeft als resultaat een rijtje coëfficiënten die dezelfde vector uitdrukt ten opzichte van de basis E, precies zoals $[T]^B_E$. Een andere manier om dit in te zien is dat de C in $[T]^B_C$ onder en in $[\mathrm{Id}]^C_E$ boven moeten corresponderen.

De matrix $[\mathrm{Id}]^C_E$ heeft als kolommen de basisvectoren van C uitgedrukt in de standaardbasis E, oftewel

$$[\mathrm{Id}]^C_E = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Er zou nu moeten gelden

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en dat klopt.

27 november, opgave 11

Zij $B = (1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3)$ een basis van $P_3(\mathbb{R})$. Zij $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ de lineaire afbeelding gegeven door $T(f) = f'$. Bereken de matrix $[T]_B^B$ op twee manieren: (1) direct, en (2) door eerst de matrix ten opzichte van de basis $(1, x, x^2, x^3)$ te bepalen en daarna een overgangsmatrix te gebruiken.

Uitwerking.

Om $[T]_B^B$ direct te bepalen, berekenen we de beelden van T op de basisvectoren in B, uitgedrukt in B:

$$\begin{aligned} T(1) &= 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (1+x+x^2) + 0 \cdot (1+x+x^2+x^3), \\ T(1+x) &= 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (1+x+x^2) + 0 \cdot (1+x+x^2+x^3), \\ T(1+x+x^2) &= 1+2x = -1 \cdot 1 + 2 \cdot (1+x) + 0 \cdot (1+x+x^2) + 0 \cdot (1+x+x^2+x^3), \\ T(1+x+x^2+x^3) &= 1+2x+3x^2 = -1 \cdot 1 - 1 \cdot (1+x) + 3 \cdot (1+x+x^2) + 0 \cdot (1+x+x^2+x^3). \end{aligned}$$

Er volgt

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

We kunnen $[T]_B^B$ ook bepalen via de basis $C = (1, x, x^2, x^3)$. Merk op dat

$$\begin{aligned} T(1) &= 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3, \\ T(x) &= 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3, \\ T(x^2) &= 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3, \\ T(x^3) &= 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3. \end{aligned}$$

Er volgt

$$[T]_C^C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De transformatiematrix $[\mathrm{Id}]_C^B$ heeft als kolommen de basisvectoren van B uitgedrukt in C, zodat

$$[\mathrm{Id}]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hiervan berekenen we de inverse:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Dus

$$[\mathrm{Id}]_B^C = \left([\mathrm{Id}]_C^B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nu kunnen we $[T]_B^B$ berekenen met de gebruikelijke formule

$$[T]_B^B = [\mathrm{Id}]_B^C \cdot [T]_C^C \cdot [\mathrm{Id}]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4 december, opgave 2

We bepalen de beelden van T op de basisvectoren in B, uitgedrukt in de basis C:

$$\begin{aligned}
T\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{smallmatrix}\right) = 1 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 0 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 3 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 0 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 5 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 0 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \\
T\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) &= \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{smallmatrix}\right) = 0 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 1 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 0 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 3 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 0 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 5 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \\
T\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) &= \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 6 & 0 \end{smallmatrix}\right) = 2 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 0 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 4 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 0 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 6 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 0 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \\
T\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right) &= \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 6 \end{smallmatrix}\right) = 0 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 2 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 0 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 4 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 0 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 6 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Er volgt

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

4 december, opgave 4

Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ het vlak gegeven door $x + 3y - 2z = 0$. Zij $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de orthogonale projectie van $\mathbb{R}^3$ op V. Zij B de standaardbasis voor $\mathbb{R}^3$. Bepaal $[\pi]_B^B$ op twee manieren: direct en via $[\pi]_C^C$, waarbij $C = (v_1, v_2, v_3)$ een basis is die bestaat uit een basis (v_1, v_2) voor V en een basis (v_3) voor $V^\perp$.

Uitwerking.

Merk op dat $0 \in V$, en dat $n = (1,3,-2)$ een normaalvector van V is. Daarom geldt voor een punt $p \in \mathbb{R}^3$ dat de orthogonale projectie van p op V gegeven wordt door

$$p - \frac{p \cdot n}{n \cdot n} n.$$

Hiermee bepalen we het beeld van π op de standaardbasis B voor $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\pi((1,0,0)) &= (1,0,0) - \frac{(1,0,0)\cdot(1,3,-2)}{(1,3,-2)\cdot(1,3,-2)}(1,3,-2) = \tfrac{1}{14}(13,-3,2),\\
\pi((0,1,0)) &= (0,1,0) - \frac{(0,1,0)\cdot(1,3,-2)}{(1,3,-2)\cdot(1,3,-2)}(1,3,-2) = \tfrac{1}{14}(-3,5,6),\\
\pi((0,0,1)) &= (0,0,1) - \frac{(0,0,1)\cdot(1,3,-2)}{(1,3,-2)\cdot(1,3,-2)}(1,3,-2) = \tfrac{1}{7}(1,3,5).
\end{aligned}$$

Er volgt

$$[\pi]_B^B = \tfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Nu bepalen we $[\pi]_B^B$ via $[\pi]_C^C$. Daartoe moeten we eerst een basis voor V vinden. Merk op dat $v_1 = (2,0,1)$ en $v_2 = (3,-1,0)$ twee onafhankelijke vectoren in V zijn. Omdat V twee-dimensionaal is (een vlak in $\mathbb{R}^3$) volgt dat (v_1, v_2) een basis voor V is. Verder is $V^\perp$ een-dimensionaal, en bevat de vector $v_3 = (1,3,-2)$, dus (v_3) is een basis voor $V^\perp$. Deze bases samen geven een basis $C = (v_1, v_2, v_3)$ van $\mathbb{R}^3$. (Er zijn veel andere mogelijke keuzes voor C!)
De matrix van π ten opzichte van C is eenvoudig. Immers, omdat v_1 en v_2 in V liggen geldt $\pi(v_1) = v_1$ en $\pi(v_2) = v_2$, en v_3 staat loodrecht op V zodat $\pi(v_3) = 0$. Dus

$$[\pi]_C^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De transformatiematrix $[\mathrm{Id}]_B^C$ heeft als kolommen de basisvectoren in C geschreven ten opzichte van de standaardbasis B, oftewel

$$[\mathrm{Id}]_B^C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hiervan berekenen we de inverse:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{7} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{14} & -\frac{5}{14} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{7} \end{array}\right).$$

Dus

$$[\mathrm{Id}]_C^B = \left([\mathrm{Id}]_B^C\right)^{-1} = \tfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 3 & -5 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nu kunnen we $[\pi]_B^B$ berekenen met de gebruikelijke formule

$$[\pi]_B^B = [\mathrm{Id}]_B^C \cdot [\pi]_C^C \cdot [\mathrm{Id}]_C^B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 3 & -5 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 13 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

4 december, opgave 5

Bepaal het spoor van de volgende drie matrices.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & 5 & 11 \\ 3 & 2 & 7 & -13 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & 5 & 11 \\ 3 & 2 & 7 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 25 & 49 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 25 & 49 \end{pmatrix}$$

Uitwerking.

Het spoor van een matrix is de som van de elementen op de diagonaal, dus

$$\mathrm{Tr}(M_1) = 1 - 3 + 5 - 13 = -10.$$

Merk verder op dat $M_2 = P^{-1} M_1 P$, met

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}.$$

Dus M_1 en M_2 zijn gelijkvormig en hebben hetzelfde spoor: $\mathrm{Tr}(M_2) = \mathrm{Tr}(M_1) = -10$.

De derde matrix, M_3, is van de vorm $M_3 = Q^{-1} P A P^{-1} Q$ waarin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 25 & 49 \end{pmatrix}.$$

Aangezien $(P^{-1}Q)^{-1} = Q^{-1}P$, geldt $M_3 = (P^{-1}Q)^{-1} A (P^{-1}Q)$ dus M_3 en A zijn gelijkvormig. Er volgt dat $\mathrm{Tr}(M_3) = \mathrm{Tr}(A) = 1 - 3 + 5 = 3$.