Tweede huiswerkopdracht Lineaire algebra 1

October 26, 2009

Dit huiswerkexamen moet 6 november, uitgewerkt in LaTeX, worden ingeleverd aan het **begin** van het werkcollege. Vergeet niet je naam en studentennummer op het materiaal te zetten dat je inlevert. Overleggen mag, maar je moet het zelf opschrijven. Kopiëren mag dus niet.

- **Opgave 1:**
  Gegeven een vectorruimte V met deelruimtes U_1 en U_2. Als er geldt

  $$\dim U_1 = 7, \qquad \dim U_2 = 9, \qquad \text{en } \dim(U_1 \cap U_2) = 4,$$

  wat is dan het grootste getal d waarvoor zeker geldt $\dim V \geq d$?

- **Opgave 2:** Zij V een vectorruimte. Laat zien dat er geldt $\dim V = \infty$ dan en slechts dan als er een oneindige rij van lineair onafhankelijke vectoren $v_1, v_2, v_3 \ldots$ in V bestaat.

- **Opgave 3:** Zij U een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$ en $(v_1, \ldots, v_k)$ een basis voor U. Definieer de afbeelding $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ door

  $$T(x) = (\langle x, v_1 \rangle, \langle x, v_2 \rangle, \ldots, \langle x, v_k \rangle)\,.$$

  a) Laat zien dat T een lineaire afbeelding is.
  b) Laat zien dat de kern van T gelijk is aan $U^\perp$.
  c) Laat zien dat de beperking $T|_U\colon U \to \mathbb{R}^k$ injectief is.
  d) Bewijs dat $T|_U$ een isomorfisme is.
  e) Bewijs dat $\dim U + \dim U^\perp = n$.
  f) Bewijs dat $U^\perp$ een complementaire ruimte van U in $\mathbb{R}^n$ is.

- **Opgave 4:** Zij V en W vectorruimtes over een lichaam F met $\dim V = \dim W = n$. Zij $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding. Laat zien dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

  a) De afbeelding f is een isomorfisme.

  b) De afbeelding f is injectief.

  c) De afbeelsing f is surjectief.

- **Opgave 5:** Stel U en U' zijn complementaire deelruimtes van een vectorruimte V. Dan definiëren we de *projectie* $\pi\colon V \to V$ *van* V *langs* U' *op* U door $\pi(v) = u$, waarbij $u \in U$ en $u' \in U'$ zodanig zijn dat $v = u + u'$. [Opmerking: Als $V = \mathbb{R}^n$ en $U' = U^\perp$, dan noemen we π de *orthogonale projectie van* V *op* U.]

  a) Laat zien dat π goed gedefinieerd is.

  b) Laat zien dat π lineair is.

  c) Laat zien dat geldt $\pi \circ \pi = \pi$.