Eerste huiswerkopdracht Lineaire algebra 1

September 22, 2009

Dit huiswerkexamen moet maandag 5 oktober, uitgewerkt in LaTeX, worden ingeleverd aan het begin van het college. Vergeet niet je naam en studentennummer op het materiaal te zetten dat je inlevert. Overleggen mag, maar je moet het zelf opschrijven. Kopiëren mag dus niet.

- **Opgave 1:**

  Gegeven vectoren a en b in $\mathbb{R}^3$. Het *uitproduct* van vector a en b (met $a = (a_1, a_2, a_3)$ en $b = (b_1, b_2, b_3)$) is de vector

  $$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \tag{1}$$

  a) Laat zien dat $a \times b$ loodrecht op a en b staat.

  b) Laat zien dat $||a \times b||^2 = ||a||^2||b||^2 - (a \cdot b)^2$

  c) Laat zien dat $||a \times b|| = ||a||\,||b|| \sin(\theta)$, met θ de hoek tussen a en b.

  d) Laat zien dat het oppervlak van het parallellogram opgespannen door de vectoren a en b gelijk is aan $||a \times b||$.

- **Opgave 2:**

  Waar of niet waar? Geef een kort bewijs of een tegenvoorbeeld.

  a) Gegeven twee vectoren $v, w \in \mathbb{R}^n$. Als er geldt $v \cdot w = 0$, dan geldt ook $v = 0$ of $w = 0$.

  b) Gegeven twee vectoren $v, w \in \mathbb{R}^n$. Dan geldt $||v + w|| = ||v - w||$ dan en slechts dan als v en w loodrecht op elkaar staan.

  c) Voor elke twee vectoren v, w in $\mathbb{R}^n$ geldt $||v - w|| \leq ||v|| + ||w||$.

- **Opgave 3:**

  Gegeven drie punten in $\mathbb{R}^3$, $P_1 = (1,1,3)$, $P_2 = (2,2,4)$ en $P_3 = (3,1,2)$.

  a) Bepaal een vergelijking voor het vlak V_1 door de punten P_1, P_2 en P_3.

  Een tweede vlak V_2 gaat door het punt $Q = (0,2,1)$ en wordt gekarakteriseerd door een normaalvector $n = (1,0,1)$.

  b) Bepaal een vergelijking voor vlak V_2.
  c) Bepaal de afstand van het punt P_1 tot het vlak V_2.
  d) Bepaal de hoek tussen de vlakken V_1 en V_2 (dat is de hoek tussen de normaalvectoren).
  e) Bepaal met behulp van het uitproduct de richtingsvector van de snijlijn van de vlakken V_1 en V_2. Geef nu een parameter–representatie van de snijlijn van de vlakken V_1 en V_2.

- **Opgave 4:**

  Zij V een vectorruimte over $\mathbb{R}$ en $x, y, z \in V$. Laat zien dat dan geldt

  $$(x + y) + (x + z) = (y + z) + 2x.$$

  (Men kan laten zien dat voor n vectoren $v_1, \dots, v_n \in V$ de som $v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ onafhankelijk is van waar de haakjes gezet worden; dit is de reden dat we de haakjes ook niet meer hoeven te zetten.)

- **Opgave 5:**

  a) Laat zien dat de verzameling van polynomen met coefficienten in $\mathbb{F}_2$ een vectorruimte over $\mathbb{F}_2$ is (met de gebruikelijke optellen en scalaire vermenigvuldiging).
  b) Zij F een lichaam. Voor welke $a, b \in F$ is de verzameling

  $$\{(w, x, y, z) \in F^4 \ : \ w + x = a + b(y + z)\}$$

  met de coördinaatsgewijze optelling en scalaire vermenigvulldiging een vectorruimte?