Tentamen Lineaire Algebra 1.

Donderdag 20 augustus 2009, 10.00-13.00.

Versie voor studenten *wiskunde*.

Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.

Motiveer ieder antwoord met een berekening of een redenering.

---

1. Beschouw het stelsel vergelijkingen

$$\begin{array}{llllc} ax_1 & +2x_2 & -x_3 & = & b \\ 2x_1 & +ax_2 & & = & 4 \\ 5x_1 & +ax_2 & -x_3 & = & -b \end{array}.$$

a. Schrijf het stelsel in de vorm $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ waarbij A een 3×3-matrix is en waarbij $\mathbf{x}$ en $\mathbf{b}$ vectoren zijn. (1 pt)

b. Ga na voor welke reële getallen a en b het stelsel precies één oplossing heeft. (5 pt)

c. Voor welke getallen a en b heeft het stelsel meer dan één oplossing? (5 pt)

Laat nu $a = -3$ en $b = -2$.

d. Bepaal A^{-1}. (6 pt)

e. Los het stelsel op. (3 pt)

2. Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A. (9 pt)

b) Bepaal een inverteerbare matrix B en een diagonalizeerbare matrix D zodanig dat $B^{-1}AB = D$. (2 pt)

c) Toon aan dat er een uniek reëel getal α bestaat zodanig dat de matrices $\alpha^n A^n$ naar een matrix $C \neq O$ convergeren (m.a.w. $C = \lim_{n\to\infty} \alpha^n A^n$). Geef tevens de waarde van α. (5 pt)

***** Z.O.Z *****

3. In $\mathbb{R}^4$ wordt het 2-vlak V gegeven door de vergelijkingen

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \end{cases}$$

a) Bepaal een orthonormale basis van V. (8 pt)

b) Bepaal een basis van $V^{\perp}$. (3 pt)

c) Bereken de projectie van de vector $(1, 0, 0, 1)$ op V. (4 pt)

4. Zij n een positief geheel getal en zij $P(n)$ de vectorruimte van polynomen met reële coëfficiënten van graad ten hoogste n. Zij

$$T\colon P(n) \to \mathbb{R}^2$$

de afbeelding gegeven door $T(f) = \big(f(0), f(1)\big)$.

a) Wat is de dimensie van $P(n)$? (4pt)

b) Laat zien dat T een lineaire afbeelding is. (4pt)

c) Wat is de dimensie van de kern van T? (6pt)

5. Laat $M = \mathcal{M}at(2 \times 2, \mathbb{R})$ de vectorruimte van 2×2-matrices met reële coëfficiënten zijn. Zij $S \subset M$ de deelverzameling bestaande uit de symmetrische 2×2-matrices. Verder is $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en $K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Toon aan dat S een lineaire deelruimte van M is en geef een basis B van S aan. (4 pt)

b. Bepaal de coördinaten van K t.o.v. de in onderdeel (a) gekozen basis B. (3 pt)

De lineaire afbeelding $T : M \to M$ wordt gegeven door

$$T : X \to -JXJ.$$

c. Laat zien: als $X \in S$, dan $T(X) \in S$. (3 pt)

Vanwege onderdeel (c) kunnen we T ook opvatten als een afbeelding van S naar S. We noemen deze afbeelding de restrictie van T tot S en schrijven hiervoor $T|_S$.

d. Bepaal nu de matrix $[T|_S]_B^B$ van $T|_S$ t.o.v. de basis B van onderdeel (a). (5 pt)

***** EINDE TENTAMEN *****