Exercises for paragraph 3 and 4 of Michael Stoll's Linear Algebra I

Let op de kleine verschillen tussen het dictaat en het college.

In het dictaat zegt regel 3 voor vectorruimtes dat er een element 0 is zodanig dat voor alle $x \in V$ geldt $0+x=x$. Voor ons is het element 0 een vast element dat onderdeel is van de definitie, en vantevoren al vastgelegd wordt. In beide gevallen wordt later bewezen dat er een uniek element is dat zich als nul gedraagt.

In het dictaat staat in regel 4 voor vectorruimtes dat er voor elke $x \in V$ een element $-x \in V$ is zodanig dat $x + (-x) = 0$. Wij hebben dat element in de regels eerst met x' aangeduid. Pas nadat we hebben laten zien (Remark 3.10) dat er een uniek element x' is zodanig dat $x + x' = 0$, noemen we dat element $-x$. We schrijven dan ook $x - y$ voor $x + (-y)$.

(1) Which of the following are fields?
  (a) The set $\mathbb{N}$ together with the usual addition and multiplication.
  (b) The set $\mathbb{Z}$ together with the usual addition and multiplication.
  (c) The set $\mathbb{Q}$ together with the usual addition and multiplication.
  (d) The set $\mathbb{R}_{\geq 0}$ together with the usual addition and multiplication.
  (e) The set $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \ : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ together with the usual addition and multiplication.
  (f) The set $\{0, 1, 2\}$ with the usual addition and multiplication, followed by taking the remainder after division by 3.

(2) Prove Remarks 3.12.

(3) Prove Remarks 4.3.

(4) Given the field F and the set V in the following cases, together with the described addition and scalar multiplication, as well as the implicit element 0, which cases determine a vector space? If not, then which rule is not satisfied?
  (a) The field $F = \mathbb{R}$ and the set V of all functions $[0, 1] \to \mathbb{R}_{>0}$.
  (b) Any field F and the set F^n of all n-tuples of elements in F, with coordinatewise addition and scalar multiplication.
  (c) Example 4.7 in the notes.
  (d) The field $F = \mathbb{Q}$ and the set $V = \mathbb{R}$ with the usual addition and multiplication.
  (e) The field $\mathbb{R}$ and the set V of all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with $f(3) = 0$, together with the usual addition and scalar multiplication.
  (f) The field $\mathbb{R}$ and the set V of all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with $f(3) = 1$, together with the usual addition and scalar multiplication.
  (g) The field $F = \mathbb{F}_{17}$ together with the subset
  $$\{(x, y, z) \in F^3 \ : \ x + 2y - z = 0\},$$
  with coordinatewise addition and scalar multiplication.
  (h) The field $F = R$ together with the subset
  $$\{(x, y, z) \in F^3 \ : \ x - z = 1\},$$
  with coordinatewise addition and scalar multiplication.

(5) Compute the distance from the point $(1, 1, 2) \in \mathbb{R}^3$ to the plane given by $x - y + 3z = -2$.