Eenhedengroepen van ordes

Iedere eindig voortgebrachte abelse groep is isomorf met de directe som van een eindig aantal eindige cyclische groepen en een eindig aantal oneindige cyclische groepen. Dat laatste aantal heet de *rang* van de groep. De *torsie-ondergroep* $T(G)$ van een abelse groep G is de ondergroep bestaande uit de elementen van eindige orde van G; men noemt G *torsievrij* als $T(G)$ alleen uit het neutrale element van G bestaat.

Onder een *orde* verstaan we een commutatieve ring A met de eigenschap dat de additieve groep van A eindig voortgebracht en torsievrij is. Voorbeeld: kies een monisch polynoom $f \in \mathbf{Z}[X]$, en schrijf $A_f = \mathbf{Z}[X]/(f)$; dan is de additieve groep van A_f de directe som van $\deg f$ oneindige cyclische groepen, dus A_f is een orde. Ordes die isomorf zijn met een dergelijke orde noemt men *monogeen*.

Het onderwerp van het voorgestelde project is de studie van de structuur van de eenhedengroep A^* van A. Uitgaande van de zogenaamde *eenhedenstelling van Dirichlet* uit de algebraïsche getaltheorie, kan de student om te beginnen bewijzen dat A^* een eindig voortgebrachte abelse groep is en eveneens een formule voor de *rang* van A^* geven. Ook kan onderzocht worden wat er over de structuur van $T(A^*)$ is te zeggen.

De eenhedengroepen van monogene ordes A hebben speciale eigenschappen. Men kan bijvoorbeeld aantonen dat er een constante c bestaat met de volgende eigenschap: als A een monogene orde is waarvoor A^* eindig is, dan geldt in feite $\#A^* \leq c$. Met andere woorden, er zijn op isomorfie na maar eindig veel eindige abelse groepen die als eenhedengroep van een monogene orde kunnen optreden.

Een expliciete waarde voor c is 1536, maar dit kan hoogstwaarschijnlijk aanzienlijk verbeterd worden. Het voornaamste doel van het project is om niet alleen de beste waarde die men voor c kan nemen te bepalen, maar ook de volledige lijst eindige abelse groepen die op kunnen treden op te stellen. Het ziet ernaar uit dat hier behalve algebra ook enige combinatoriek bij komt kijken.

Als er tijd over is, kan de student wellicht over generalisaties nadenken. Het lijkt bijvoorbeeld waarschijnlijk dat er voor elk tweetal niet-negatieve gehele getallen n en r een constante $c_{n,r}$ bestaat met de volgende eigenschap: stel dat A een orde is waarvoor er een surjectief ringhomomorfisme $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n] \to A$ bestaat en waarvoor A^* rang ten hoogste r heeft; dan geldt $\#T(A^*) \leq c_{n,r}$. (Met $n = 1$, $r = 0$ zijn we in het eerdere geval terug.) Klopt dit inderdaad? Kan men boven- en ondergrenzen voor $c_{n,r}$ aangeven?

Begeleider: H. W. Lenstra