Tentamen Algebra 3
8 juni 2017, 14:00 – 17:00
zaal 407-409

Dit is een open-boektentamen, maar je mag niet zonder uitleg naar opgaven verwijzen. Bewijs je antwoorden en leg uit hoe je eraan komt. Elektronische hulpmiddelen, inclusief rekenmachines en telefoons, zijn niet toegestaan. Nummer je pagina's. Als je de antwoorden niet op de logische volgorde opschrijft, vermeld dan duidelijk waar welk antwoord staat. De verhouding van de punten voor de vier opgaven is 2 : 3 : 3 : 2.

Opgave 1. Bepaal de graad van een ontbindingslichaam van $f = x^3 - 2$ over

(a) $\mathbf{Q}$,
(b) $\mathbf{R}$,
(c) $\mathbf{F}_3$,
(d) $\mathbf{F}_7$,
(e) $\mathbf{F}_{11}$,
(f) $\mathbf{F}_{13}$.

Opgave 2. Definieer het polynoom $f = x^4 - 2x^2 + 25 \in \mathbf{Q}[x]$. Zij $\alpha \in \mathbf{C}$ een nulpunt van f.

(a) Laat zien dat $\beta = \alpha^3 + 3\alpha$ en $\gamma = \alpha^3 - 7\alpha$ beide graad 2 over $\mathbf{Q}$ hebben.
(b) Laat zien dat er geldt $\mathbf{Q}(\beta, \gamma) = \mathbf{Q}(\alpha)$.
(c) Bewijs dat f irreducibel is.
(d) Bewijs dat $\mathbf{Q}(\alpha)$ Galois is over $\mathbf{Q}$ en bepaal de Galoisgroep $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q})$.
(e) Wat zijn de nulpunten van f in $\mathbf{Q}(\alpha)$?
(f) Geef alle deellichamen van $\mathbf{Q}(\alpha)$.

Opgave 3. Zij $\Phi_{15} \in \mathbf{Z}[x]$ het 15-de cyclotomische polynoom en $K = \Omega_{\mathbf{Q}}^{\Phi_{15}}$ een ontbindingslichaam van Φ_{15} over $\mathbf{Q}$. Zij $\zeta = \zeta_{15} \in K$ een nulpunt van Φ_{15}.

(a) Laat zien dat de Galoisgroep $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ isomorf is met $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$.
(b) Laat zien dat de elementen $-3, 5, -15 \in K$ kwadraten zijn in K.
(c) Bepaal alle deellichamen F van K waarvoor de graad $[F : \mathbf{Q}]$ gelijk is aan 4.
(d) Laat zien dat de deellichamen $\mathbf{Q}(\zeta^3)$ en $\mathbf{Q}(\zeta + \zeta^{11})$ van K hetzelfde zijn.
(e) Zij p een priemgetal. Laat zien dat Φ_{15} een nulpunt heeft in $\mathbf{F}_{p^4}$.
(f) Zij p een priemgetal. Laat zien dat Φ_{15} niet irreducibel is over $\mathbf{F}_p$.

Opgave 4. Voor elke gehele $n \geq 1$ en $a \in \mathbf{Q}^*$ definiëren we

$$f_{a,n} = x^{2n} + x^n + a \in \mathbf{Q}[x].$$

Voor welke $n \geq 1$ en $a \in \mathbf{Q}^*$ is de Galoisgroep $\mathrm{Gal}(\Omega_{\mathbf{Q}}^{f_{a,n}}/\mathbf{Q})$ oplosbaar?