Tentamen Algebra 1, 28 juni 2018

Je mag het dictaat gebruiken, maar het gebruik van aantekeningen en een rekenmachine is niet toegestaan. Je mag niet naar opgaven uit het dictaat verwijzen, behalve naar opgaven 2.46, 2.49, 4.58, 5.27, 5.30, 8.4, 8.13.

Motiveer steeds je antwoord en noem de stellingen die je gebruikt!

Opgave 1 (7 punten)
Definieer de permutatie $\sigma \in S_9$ door $\sigma = (1\ 5\ 8\ 7\ 3)(2\ 4\ 7\ 3\ 6)(1\ 6\ 7\ 4\ 9\ 3)$.
a) Schrijf σ als product van disjuncte cykels.
b) Wat is de orde van σ?
c) Zij H de ondergroep van S_9 voortgebracht door σ. Wat is het aantal banen van de werking van H op de verzameling $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$?

Opgave 2 (9 punten)
Beschouw het getal $n = 561 = 3 \times 11 \times 17$.
a) Wat is de orde van de groep $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$?
b) Laat zien dat voor elk geheel getal a met $\text{ggd}(a, n) = 1$ geldt $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$.
c) Bepaal de orde van het element $\overline{2}$ in $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.
d) Laat zien dat de groep $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ niet cyclisch is.

Opgave 3 (10 punten)
Zij $G = A_4$ de alternerende groep. Zij $N \subset G$ de ondergroep voortgebracht door de elementen $\sigma = (12)(34)$ en $\tau = (13)(24)$.
a) Laat zien dat N bestaat uit de elementen $(1), \sigma$, τ en $\sigma\tau = \tau\sigma = (14)(23)$.
b) Laat zien dat N normaal is in G.
c) Laat zien dat het quotiënt G/N een abelse groep van orde 3 is.
d) Laat zien dat de commutatorondergroep $[G, G]$ gelijk is aan N. [Hint: gebruik c).]
e) Bepaal hoeveel homomorfismen er bestaan van G naar de groep $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$.

Opgave 4 (8 punten)
Geef voor elk van de volgende beschrijvingen een voorbeeld met korte uitleg, of leg kort uit waarom zo'n voorbeeld niet bestaat.
a) Een groep G met een ondergroep H van index $[G : H] = 3$ die niet normaal is in G.
b) Een groep G met een werking op een verzameling X die niet transitief is.
c) Een groep G met een dekpuntsvrije werking op een verzameling X die niet trouw is.
d) Een groep G met precies 17 conjugatieklassen.

Opgave 5 (6 punten)
Zij G een groep die werkt op een eindige verzameling X. Laat zien dat elke twee geconjugeerde elementen g en h van G evenveel dekpunten hebben.

Opgave 6 (5 punten)
Zij G een eindige groep met precies 2 conjugatieklassen. Bewijs dat G orde 2 heeft.