Tentamen Algebra 1, 28 juni 2012, 10:00–13:00

Je mag het dictaat, je aantekeningen, en boeken gebruiken, maar geen rekenmachine en andere electronische hulpmiddelen. Motiveer steeds je antwoord, en noem de resultaten die je gebruikt. Er mag verwezen worden naar resultaten die in het dictaat bewezen zijn, maar niet naar opgaven, tenzij anders vermeld. Op de achterkant staan formules en resultaten waar je ook naar mag verwijzen. Onderaan de pagina staat de normering. Het tentamen wordt op 4 juli nagekeken. Succes!

Opgave 1. Laat σ in S_9 gegeven zijn door $\sigma = (5\ 7\ 9)(7\ 2\ 1)(1\ 7\ 2\ 3\ 4\ 9\ 8)(5\ 6)$.

(a) Geef een disjuncte cykeldecompositie van σ. Geef de orde van σ.

(b) Bepaal $\sigma^{2012^{2011}}$.

(c) Is er een τ in S_9 met $\tau^2 = \sigma$? Zo ja, geef er één. Hint: denk aan $\varepsilon(\sigma)$.

(d) Is er een τ in $\langle\sigma\rangle$ met $\tau^3 = \sigma$? Zo ja, geef er één. Hint: denk aan $\mathrm{orde}(\sigma)$.

Opgave 2.

(a) Bestaat er een a in $\mathbb{Z}$ met $13{\cdot}a \equiv 1 \bmod 255$? Zo ja, bepaal zo'n a.

(b) Bewijs dat voor alle x in de eenhedengroep $(\mathbb{Z}/255\mathbb{Z})^*$ geldt dat $\mathrm{orde}(x)$ een macht van 2 is.

(c) Bepaal de orde van $\overline{7}$ in $(\mathbb{Z}/255\mathbb{Z})^*$.

Opgave 3. Laat Z de verzameling zijn van de zijden van een regelmatige 7-hoek, en $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Hoeveel banen heeft de verzameling $\{f\colon Z \to \{1, 2, \ldots, n\}\}$ van "kleuringen" onder natuurlijke werking van de dihedrale groep D_7?

Opgave 4. Laat G een groep zijn, werkend op een eindige verzameling X. Neem aan dat $\#G = 77$ en dat $\#X = 30$. Laat zien dat $X^G \neq \emptyset$. Hint: denk aan de banen, en hun lengten.

Opgave 5. Bepaal $\#\mathrm{Hom}(C_6, A_5)$.

Opgave 6. Laat G een groep zijn, $N \subset G$ een normale ondergroep, x, y en z in G met $x^3 \in N$, $y^5 \in N$, $zxz^{-1}y^{-1} \in N$. Bewijs dat $x \in N$ en $y \in N$. Hint: ga redeneren in $\overline{G} := G/N$, denk aan begrippen als orde en conjugatie.

Normering: 100 = 10 (gratis) + 20 (4x5) + 20 (10+5+5) + 15 + 10 + 10 + 15

Kleurformule Als een eindige groep G op een eindige verzameling X werkt, en $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, dan geldt

$$\#\left(G\backslash\{f\colon X \to \{1,2,\ldots,n\}\}\right) = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G} n^{\#\langle g\rangle\backslash X}.$$

Sokken en schoenen Voor x en y in een groep G: $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

Conjugatie en cykels Voor X een verzameling, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $x_1, \ldots, x_n$ in X verschillend, en τ in $\mathrm{Sym}(X)$ geldt: $\tau(x_1\, x_2 \cdots x_n)\tau^{-1} = (\tau(x_1)\, \tau(x_2) \cdots \tau(x_n))$.

Normale ondergroep Voor G een groep en N een ondergroep: N is normaal precies dan als voor alle $g \in G$: $gNg^{-1} \subset N$.

Homomorfismen en voortbrengers Een groepshomomorfisme $f\colon \langle S\rangle = G_1 \to G_2$ is bepaald door zijn beperking tot S.

Homomorfismen en ordes Voor $f\colon G_1 \to G_2$ een groepshomomorfisme en $x \in G_1$ van eindige orde geldt: $\mathrm{orde}(f(x))|\mathrm{orde}(x)$.

Homverzameling 1 Voor $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ en G een groep: $\#\mathrm{Hom}(C_n, G) = \#\{g \in G : g^n = e\}$.

Homverzameling 2 Voor G een groep en A een abelse groep: $\#\mathrm{Hom}(G, A) = \#\mathrm{Hom}(G_{\mathrm{ab}}, A)$.

Orde en cykels Voor $\sigma \in S_n$ met cykeltype $(k_1, k_2, \ldots, k_t)$: $\mathrm{orde}(\sigma) = \mathrm{kgv}(k_1, k_2, \ldots, k_t)$.