Oefenopgaven voor de toets van algebra 1

Ronald van Luijk

De toets zal bestaan uit twee of drie opgaven. Uitwerkingen van deze oefenopgaven staan op de volgende pagina.

(1) Zij $F \subset \mathbb{R}^2$ een regelmatige 13-hoek met het punt $(0,0)$ als middelpunt, en met een hoekpunt op de x-as. Zij $s\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de spiegeling in de x-as. Zij $r\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de rotatie om het punt $(0,0)$ over een hoek $2\pi/13$. Dan wordt $D_{13} = \mathrm{Sym}(F)$ voortgebracht door r en s. Geef twee gehele getallen k en ℓ zodanig dat er geldt
$$r^5 s r^{-9} s^3 r^3 s^{-1} r^{-1} = r^k s^\ell \,.$$

(2) Geef alle conjugatieklassen van D_6.

(3) Is de groep D_6 isomorf met de alternerende groep A_4?

(4) Zij G een groep. Bewijs dat twee geconjugeerde elementen van G dezelfde orde hebben.

(5) Geef een element van S_{10} orde 30.

(6) Bewijs dat alle elementen van orde 6 in S_5 geconjugeerd zijn.

(7) Zij G een groep en $H = Z(G)$ het centrum. Voor elk element $g \in G$ noteren we σ_g voor de conjugatie afbeelding $G \to G$ die $x \in G$ stuurt naar gxg^{-1}. Laat zien dat als voor de nevenklassen van twee elementen $g_1, g_2 \in G$ geldt $g_1H = g_2H$, dat er dan geldt $\sigma_{g_1} = \sigma_{g_2}$.

Uitwerkingen

(1) Er geldt $s = s^{-1}$ en $r^{13} = \mathrm{id}$ en $sr = r^{-1}s$, dus ook $rs = sr^{-1}$ en met inductie $sr^k = r^{-k}s$ voor alle gehele k. Dus krijgen we

$$r^5sr^{-9}s^3r^3s^{-1}r^{-1} = r^5sr^4sr^3(sr^{-1}) = r^5sr^4sr^3(rs) = r^5sr^4(sr^4)s = r^5sr^4(r^{-4}s)s = r^5s,$$

dus (bijvoorbeeld) voor $k = 5$ en $\ell = 1$.

(2) Zij r een rotatie om het middelpunt van de regelmatige zeshoek. Zij s de spiegeling in een van de diagonalen. Dan wordt de groep D_6 voortgebracht door r en s. We claimen dat dit de conjugatieklassen zijn:

$$\{\mathrm{id}\}, \{r, r^{-1}\}, \{r^2, r^{-2}\}, \{r^3\}, \{s, r^2s, r^4s\}, \{rs, r^3s, r^5s\}.$$

De identiteit vormt altijd een conjugatieklasse. Twee geconjugeerde elementen hebben het zelfde teken (vraag jezelf af waarom!), dus elementen van de vorm r^k zijn niet geconjugeerd met elementen van de vorm $r^\ell s$. We kijken eerst naar de elementen van teken $+1$, dus de machten van r. Wegens $sr^ks = r^{-k}$ zijn r^k en r^{-k} geconjugeerd voor gehele getallen k, dus in het bijzonder r en r^{-1} (van orde 6) en ook r^2 en r^{-2} (van orde 3). De enige macht van r die overblijft is r^3 van orde 2. Omdat geconjugeerde elementen dezelfde orde hebben (zie opgave 4) vinden we de eerste vier conjugatieklassen.

Voor gehele getallen k en ℓ geldt $r^k(r^\ell s)r^{-k} = r^{\ell+2k}s$. Voor $\ell = 0$ zien we dat alle elementen van de vorm $r^{2k}s$ geconjugeerd zijn met elkaar. Voor $\ell = 1$ zien we dat alle elementen van de vorm $r^{2k+1}s$ geconjugeerd zijn met elkaar. Om te concluderen dat de elementen van teken -1 uiteen vallen in de laatste twee geclaimde conjugatieklassen is het dus voldoende om te laten zien dat s en rs niet geconjugeerd zijn. Als we D_6 injectief afbeelden naar S_6 door een isometrie te sturen naar de bijbehorende permutatie van de hoekpunten en D_6 identificeren met het beeld, dan zien we dat s twee vaste punten heeft en rs nul. De elementen s en rs zijn dus niet eens geconjugeerd in S_6 (want niet hetzelfde cykeltype), dus ook niet in D_6. De klassen zijn dus inderdaad zoals geclaimd.

(3) Een isomorfisme stuurt een element van eindige orde n naar een element van orde n. Omdat D_6 wel elementen heeft van orde 6, maar A_4 niet (vraag jezelf af waarom!) is er geen isomorfisme tussen deze groepen.

(4) Stel x en x' zijn twee geconjugeerde elementen van G. Dan is er een element $g \in G$ zodanig dat $x' = gxg^{-1}$. Als voor een geheel getal $n > 0$ geldt $x^n = e$, dan geldt ook

$$x'^n = (gxg^{-1})(gxg^{-1}) \dots (gxg^{-1}) = gx^ng^{-1} = geg^{-1} = gg^{-1} = e,$$

dus de orde van x' is hooguit de orde van x. Schrijven we $x = g^{-1}x'g$, dan volgt op dezelfde manier dat de orde van x hooguit de orde van x' is. De twee ordes zijn dus gelijk.

(5) Bijvoorbeeld de permutatie $\sigma = (1\,2)(3\,4\,5)(6\,7\,8\,9\,10)$. Dit is het product van disjuncte cykels en de orde van σ is dus gelijk aan het kleinste gemene veelvoud van de lengtes 2, 3 en 5, dus gelijk aan 30.

(6) Stel $\pi \in S_5$ heeft orde 6. Als we $\pi = c_1c_2 \cdots c_r$ als samenstelling van disjuncte cykels schrijven, dan is de orde het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van de lengtes van die cykels. Dus, omdat 6 deelbaar is door de priemen 2 en 3, is er minstens een cykel, zeg c_1, waarvan de lengte deelbaar is door 3 en een cykel, zeg c_2, waarvan de lengte deelbaar is door 2. Dit zijn niet dezelfde cykels, want dan zou de lengte een veelvoud zijn van 6, wat in tegenspraak is met het feit dat we slechts vijf elementen permuteren. Dus zijn c_1 en c_2 disjunct, en dus bevatten ze samen minstens $3 + 2 = 5$ elementen. Omdat er ook slechts vijf elementen gepermuteert worden, geldt er gelijkheid, en is c_1 een 3-cykel en c_2 een 2-cykel. Het cykeltype is dus $(3, 2)$. Dit geldt voor alle permutaties van orde 6. Omdat permutaties met hetzelfde cykeltype geconjugeerd zijn, volgt dat alle permutaties van orde 6 geconjugeerd zijn.

(7) Neem aan $g_1H = g_2H$. Dan is er een element $h \in H = Z(G)$ met $g_2 = g_1h$. Omdat h met alle elementen van G commuteert, geldt voor alle $x \in G$ dat

$$\sigma_{g_2}(x) = g_2xg_2^{-1} = g_1hx(g_1h)^{-1} = g_1hxh^{-1}g_1^{-1} = g_1hh^{-1}xg_1^{-1} = g_1xg_1^{-1} = \sigma_{g_1}(x),$$

dus volgt $\sigma_{g_1} = \sigma_{g_2}$.