X. Variatierekening.

In dit hoofdstuk onderzoeken we een aantal problemen die neerkomen op het minimaal of maximaal maken van een integraal. Dit is het terrein van de variatierekening. We noemen een aantal klassieke problemen op dit gebied:

1. Gegeven zijn twee vaste punten op een oppervlak. Wat is het kortste pad tussen de twee punten dat geheel op het oppervlak ligt?
2. Wat is de vorm van het gebied dat omsloten wordt door een kromme van gegeven omtrek en dat een zo klein mogelijke oppervlakte heeft (het isoperimetrisch probleem)?
3. Wat is de vorm van een oppervlak in de driedimensionale ruimte dat begrensd wordt door een gegeven gesloten kromme en dat een zo klein mogelijke oppervlakte heeft?
4. Gegeven zijn twee punten A en B in het zwaartekrachtveld van de aarde, waarbij A hoger ligt dan B. Welk pad moet het deeltje nemen zodat het binnen zo kort mogelijke tijd van A naar B geraakt? (het probleem van de brachistochroon).
5. Een ketting van homogeen materiaal wordt opgehangen aan twee punten. Wat is de vorm die de ketting aanneemt?
6. Het principe van Hamilton uit de klassieke mechanica: het gedrag van een fysisch systeem wordt beschreven door het minimaal zijn van de actie $S = \int L(q, \dot{q}, t)dt$ (waarbij L de Lagrangiaan is van het systeem en q zijn gegeneraliseerde coördinaten).

§10.1. De functionele afgeleide.

We beschouwen de Hilbertruimte $V = L_2(\Omega, \mathbf{R})$ van reële kwadratisch integreerbare functies op een deelverzameling $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Voor $f \in V$ geldt dat $\int_\Omega f(x)^2 d^n x$ bestaat en eindig is. Merk op dat als $f, g \in V$, dan is $\lambda f \in V$ voor $\lambda \in \mathbf{R}$ en aangezien

$$|f(x)+g(x)|^2 \leq (|f(x)|+|g(x)|)^2 \leq (|f(x)|+|g(x)|)^2+(|f(x)|-|g(x)|)^2 = 2(|f(x)|^2+|g(x)|^2) \quad (10.1)$$

is ook $f + g \in V$. Verder is $4f(x)g(x) = (f(x) + g(x))^2 + (f(x) - g(x))^2$ dus fg is absoluut integreerbaar op Ω (d.w.z. fg en $|fg|$ zijn integreerbaar). Op V kunnen we een inwendig product definiëren d.m.v. $\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)g(x)dx$.

Een functionaal op V is een (niet-noodzakelijk lineaire) afbeelding van een lineaire deelruimte $W \subset V$ naar $\mathbf{R}$. W heet het domein van de functionaal. Voorbeelden van functionalen zijn:

1. $F(f) = \int_\Omega f(x)h(x)d^n x$ waarbij $h \in V$ een vaste functie is.
2. $F(f) = f(x_0)$ voor $x_0 \in \Omega$.
3. $F(f) = \int_\Omega (f'(x))^2 d^n x$.

De eerste twee functionalen zijn lineair, de laatste niet. De functionaal in voorbeeld 3 is alleen gedefinieerd op de lineaire deelruimte W bestaande uit de functies $f \in V$ die differentieerbaar zijn en zodanig dat $f' \in V$.

Als $f \in V$ en F is een functionaal op V dan is de *functionele afgeleide* $\dfrac{\delta F}{\delta f(x)}$ gedefinieerd als volgt:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{F(f + \epsilon g) - F(f)}{\epsilon} = \int_\Omega \frac{\delta F}{\delta f(x)} g(x) d^n x, \qquad \text{voor } g \in V.$$

Evenals dat voor de gewone afgeleide van een functie het geval is, is de functionele afgeleide niet altijd gedefinieerd. Symbolisch kunnen we ook definiëren: $\dfrac{\delta F}{\delta f(x)} = \lim\limits_{\epsilon\to 0} \dfrac{F(f + \epsilon\delta_x) - F(f)}{\epsilon}$, waarbij δ_x gedefinieerd is als $\delta_x(y) = \delta(y - x)$. Natuurlijk is $\delta_x \notin V$.

Als voorbeeld bepalen we de functionele afgeleide voor de bovenstaande drie voorbeelden:

1. $\dfrac{\delta F}{\delta f(x)} = h(x)$.
2. $\dfrac{\delta f(x_0)}{\delta f(x)} = \delta(x - x_0)$.
3. Voor $\Omega = \mathbf{R}^n$ en voor $f \in V$ tweemaal continu differentieerbaar, is $\dfrac{\delta F(f)}{\delta f(x)} = -2f''(x)$.

De functionele afgeleide speelt dezelfde rol als de gewone functie-afgeleide in het geval van functies van één variabele: als de functionaal F voor $f \in W \subset V$ een extreme waarde aanneemt, en de functionele afgeleide is goed gedefinieerd op W, dan is $\frac{\delta F(f)}{\delta f(x)} = 0$. Het omgekeerde hoeft niet het geval te zijn; in dit geval kunnen we alleen zeggen dat de functionaal in f een *stationaire waarde* heeft.

Het volgende verband bestaat tussen de functionele afgeleide en een gewone functie-afgeleide: laat $\Omega = [a, b]$ een gesloten interval in $\mathbf{R}$ zijn. Verdeel het interval in stukken van gelijke lengte $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ met $\Delta x_i = \Delta x$ vast. Benader nu $F(f)$ door een functionaal $\tilde{F}$ die alleen afhangt van $f_i = f(x_i)$ voor $i = 0, \ldots, n$; m.a.w., $\tilde{F}$ is een functie van $f_0, \ldots, f_n$ en als $\Delta x \to 0$ dan gaat $\tilde{F}(f_0, \ldots, f_n)$ in de limiet naar $F(f)$. Laat nu ϵ een kleine parameter en $g(x)$ een functie. Dan is

$$\Delta\tilde{F} = \tilde{F}(f_0 + \epsilon g_0, \ldots, f_n + \epsilon g_n) - \tilde{F}(f_0, \ldots, f_n) = \epsilon \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial f_i} g(x_i) + O(\epsilon^2),$$

anderzijds is

$$\Delta F = F(f + \epsilon g) - F(f) = \epsilon \int_\Omega \frac{\delta F}{\delta f(x)} g(x) dx + O(\epsilon^2).$$

Vergelijken van beide uitdrukkingen geeft dat

$$\frac{\delta F}{\delta f(x)} = \lim_{\Delta x \to 0, f_i \to f(x)} \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial f_i}.$$

Laat nu m een differentieerbare functie zijn van n variabelen, en laat $F_1, \ldots, F_n$ functionalen zijn op V. Dan is M gedefinieerd door $M(f) = m(F_1(f), \ldots, F_n(f))$ een functionaal op V. Verder geldt de *kettingregel*:

$$\frac{\delta M}{\delta f(x)} = \partial_i m \frac{\delta F_i}{\delta f(x)}. \tag{10.2}$$

§10.2 De vergelijking van Euler-Lagrange.

In veel toepassingen hebben we te maken met een functionaal $F(f)$ die van de vorm $F(f) = \int_a^b L(f, f', x) dx$ is, waarbij L (ook wel de *Lagrangiaan* genaamd) een continu differentieerbare functie is, en $[a, b]$ een gesloten interval in $\mathbf{R}$. Voor een differentieerbare functie g is

$$F(f+\epsilon g) = \int_a^b L(f+\epsilon g, f'+\epsilon g', x)dx = \int_a^b L(f, f', x)dx + \epsilon \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial f} g(x) + \frac{\partial L}{\partial f'} g'(x)\right) dx + O(\epsilon^2)$$

$$= F(f) + \epsilon \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'}\right) g(x)dx + \epsilon \frac{\partial L}{\partial f'} g(x)\Big|_a^b + O(\epsilon^2) \tag{10.3}$$

Op dezelfde manier vinden we, als $F(f) = \int_\Omega L(f, \partial_i f, x^i) d^n\mathbf{x}$ een meerdimensionale integraal is en L afhangt van $x^1, \ldots, x^n$ dat

$$F(f+\epsilon g) = F(f) + \epsilon \int_\Omega \left(\frac{\partial L}{\partial f} - \partial_j \frac{\partial L}{\partial(\partial_j f)} \right) g(\mathbf{x}) d^n\mathbf{x} + \epsilon \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial L}{\partial(\partial_j f)} g(\mathbf{x}) n^j dA + O(\epsilon^2) \tag{10.4}$$

waarbij n^i de componenten zijn van de uitwendige normaal op Ω. Als $[a, b] = \mathbf{R}$ resp. $\Omega = \mathbf{R}^n$, of als de functieruimte V bestaat uit functies op Ω die aan een vaste randconditie voldoen, dan is $g(a) = g(b) = 0$ resp. $g(\mathbf{x}) = 0$ op de rand $\partial\Omega$, en dus, aangezien verder $g(\mathbf{x})$ willekeurig is, is een voorwaarde opdat de functionaal voor $f(\mathbf{x})$ een minimum of maximum aanneemt, dat

$$\frac{\delta F(f)}{\delta f(x)} = \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} = 0, \qquad \text{resp.} \quad \frac{\delta F(f)}{\delta f(\mathbf{x})} = \frac{\partial F}{\partial f} - \partial_j \frac{\partial F}{\partial(\partial_j f)} = 0. \tag{10.5}$$

Vergelijking (10.5) heet de vergelijking van Euler-Lagrange en speelt een centrale rol in de variatierekening. Als F ook afhangt van de tweede (resp. hogere) afgeleide(n) van f, dan bestaat er een analoge vorm voor $\frac{\delta F(f)}{\delta f(x)}$, die niet moeilijk af te leiden is. Tenslotte kan het voorkomen dat de functionaal F niet van één enkele functie f afhangt, maar van een eindig aantal (zeg k) functies $f_1, \ldots, f_n$. In dit geval is een noodzakelijke voorwaarde opdat F een maximum of een minimum bereikt, dat de k functionele afgeleiden $\frac{\delta F(f_1, \ldots, f_k)}{\delta f_j(x)}$ alle nul zijn. Bedenk dat, evenals in het geval van de gewone functie-afgeleiden, het nul zijn van de functionele afgeleide geen voldoende voorwaarde is voor een minimum of maximum, en moeten we een aparte redenering toepassen om na te gaan dat een eventueel gevonden oplossing inderdaad een maximum dan wel minimum geeft. Anders dan het geval is voor gewone functies, is het lang niet altijd duidelijk dat de functionaal wel echt een minimum of maximum aanneemt.

We geven nu een aantal toepassingen. 1. Laat (x_1, y_1) en (x_2, y_2) vaste punten in E_2 zijn. De lengte van een (stuksgewijs gladde) kromme van de vorm $y = f(x)$ wordt gegeven door $F(f) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$. Onder al deze krommen zoeken we degene met de kortste lengte. Aangezien de eindpunten vast zijn, moet de Euler-Lagrange vergelijking gelden. Deze luidt: $\frac{d}{dx}\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} = 0$. Hieruit volgt dat $f'(x)$ constant is en dus is de kromme $y = f(x)$ een rechte lijn.

2. *De brachistochroon.* Gegeven zijn in een homogeen zwaartekrachtveld $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ twee punten A en B, waarbij A "hoger" ligt dan B (d.w.z. de potentiaal in A is groter dan in B). Gevraagd is de kromme tussen A en B die een massadeeltje moet doorlopen om zo snel mogelijk van A naar B te geraken (waarbij wrijvingskrachten worden verwaarloosd). We geven A en B coördinaten: $A(0, a)$ en $B(b, 0)$; We nemen verder aan dat de kromme de vorm $y = y(x)$ heeft (en dus in een vlak ligt). Volgens behoud van energie geldt dan: $v^2 + 2gy = 2ga$ waarbij $v = v(y)$ de snelheid is van het massadeeltje. De totale valtijd is dus gelijk aan $T = \int_A^B \frac{ds}{v} = \int_0^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(a-y)}} dx$. Aangezien g constant is en verder geen rol speelt, moeten we de functionaal $F(y) = \int_0^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{a-y}} dx$ minimaliseren. Voor het gemak kiezen we $a = 1$ en $b = \pi/2$. De randpunten liggen dus vast. Merk op dat de Lagrangiaan L alleen van y en y' afhangt en niet van x. In dit geval kunnen we meteen een *eerste integraal* opschrijven: aangezien

$$\frac{d}{dx}\left(y' \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = y' \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} + y'' \frac{\partial L}{\partial y'} == y' \frac{\partial L}{\partial y} + y'' \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{dL}{dx}$$

is

$$\frac{d}{dx}\left(L - y'\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0 \tag{10.6}$$

en dus is $L - y'\dfrac{\partial L}{\partial y'}$ constant.

Dit passen we toe op het voorbeeld: voor $L = \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{1-y}}$ is $L - y'\dfrac{\partial L}{\partial y'} = 1/\sqrt{(1-y)(1+y'^2)}$ en dus is $(1-y)(1+y'^2)$ gelijk aan een constante C. Verder uitwerken geeft $y' = -\sqrt{\dfrac{C-1+y}{1-y}}$. Het minteken geldt omdat we weten dat y een dalende functie van x moet zijn. Integreren geeft $-\int dy\sqrt{\dfrac{1-y}{C-1+y}} = \int dx$ dus, voor $1-y = Cw$,

$$x + D = C\int dw\sqrt{\frac{w}{1-w}} = C\left(-\sqrt{w(1-w)} + \arcsin\sqrt{w}\right)$$

met C, D integratieconstanten. Aangezien $x = 0$ als $y = 1$, dus $w = 0$, is $D = 0$. verder is $x = \pi/2$ voor $y = 0$, dus $\dfrac{\pi}{2} = -\sqrt{C-1} + C\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{C}}$; dit levert $C = 1$. De oplossing is dus $x = -\sqrt{y(1-y)} + \arcsin\sqrt{1-y}$. Dit is de vergelijking van een *cycloïde*, zoals wellicht simpeler is in te zien aan de hand van een parametrisatie: ga na dat $y(\phi) = \cos^2\phi/2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos\phi$, $x(\phi) = \dfrac{1}{2}\phi - \dfrac{1}{2}\sin\phi$ een parametrisatie van de kromme is. Een cycloïde is de baan die een vast punt op een cirkel doorloopt wanneer de cirkel langs een rechte lijn afrolt.

3. Beschouw een lineaire keten van massadeeltjes met massa m die verbonden zijn door veren en zich in evenwicht op posities $x_0, x_1, \ldots$ bevinden zodanig dat de afstanden $x_{i+1} - x_i = a$ gelijk zijn. Onder invloed van de veerkracht kunnen de deeltjes een harmonische trilling uitvoeren. De positie van deeltje i wordt aangegeven met $q_i = q_i(t)$. De bewegingsvergelijking luidt $m\ddot{q}_i = -k(q_i - q_{i-1}) - k(q_i - q_{i+1})$. Hierbij hoort de Lagrangiaan $L = \sum_i \dfrac{1}{2}m\dot{q_i}^2 - \dfrac{1}{2}k(q_i - q_{i-1})^2$ en de bewegingsvergelijking wordt verkregen uit $\dfrac{\delta S}{\delta q_i} = 0$ voor $i = 0, 1, \ldots$, waarbij de actie S gegeven is door $S = \int L dt$. We gaan nu over tot een continu systeem door $a \to 0$ te laten gaan. Hierbij schrijven we $q(x,t)$ voor $q_i(t)$ en we houden $\mu = m/a$ en $Y = ka$ constant. Dan gaat $\dfrac{q_{i+1} - q_i}{a}$ over in $\dfrac{\partial q}{\partial x}$, en de Lagrangiaan gaat over via $L = \sum_i \dfrac{1}{2}\mu a\left(\dfrac{\partial q}{\partial t}\right)^2 - \dfrac{1}{2}Y a\left(\dfrac{\partial q}{\partial x}\right)^2$ in $L = \int \mathcal{L} dx$ met de *Lagrange-dichtheid* $\mathcal{L} = \dfrac{1}{2}\mu\left(\dfrac{\partial q}{\partial t}\right)^2 - \dfrac{1}{2}Y\left(\dfrac{\partial q}{\partial x}\right)^2$. De actie kunnen we dus schrijven als $S = \int \mathcal{L} dx dt$. De Euler-Lagrange-vergelijking is nu $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \partial_x \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x q)} - \partial_t \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t q)} = 0$. Dit geeft de bewegingsvergelijking

$$\mu\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - Y\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0.$$

Dit is de eendimensionale golfvergelijking.

4. Het *principe van Fermat.* Het principe van Fermat uit de geometrische optica zegt dat het pad dat een lichtstraal tussen twee punten aflegt het pad is dat in zo kort mogelijke tijd wordt afgelegd. Dit komt erop neer dat de lijnintegraal $I = \int n ds$ minimaal is waarbij n de brekingsindex is. We beschouwen een tweedimensionale situatie waarbij het pad dat de lichtstraal aflegt tussen twee punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) met $y_1 < y_2$ een kromme $y = y(x)$ is, en waarbij de brekingsindex $n = n(y)$ alleen van y afhangt. Laat $\phi(x)$ de hoek zijn die het pad maakt met de positieve x-as, dus $y'(x) = \tan\phi(x)$. Dan is $I = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} n(y)\sqrt{1+y'}dx$. De Lagrangiaan $L = n(y)\sqrt{1+y'^2}$ hangt alleen van y en y' af en als in voorbeeld 2 is een eerste integraal

$$L - y'\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{n(y)}{\sqrt{1+y'^2}} = n(y)\cos\phi(x) = C$$

met C een constante. M.a.w. $n\cos\phi$ is constant op het pad. Beschouw nu de situatie dat $n(y) = n_1$ als $y > 0$ en $n(y) = n_2$ als $y < 0$. De lijn $y = 0$ is dus de grenslijn tussen twee media met verschillende brekingsindices n_1 en n_2. Dan is $n_1\cos\phi_1 = n_2\cos\phi_2$ waarbij ϕ_1 resp. ϕ_2 de hoek is die de lichtstraal maakt met de grenslijn $y = 0$. Dit resultaat staat bekend als de *brekingswet van Snellius.* I.h.a. wordt deze geformuleerd in de vorm $n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2$ waarbij θ_1, θ_2 de hoek is die de lichtstraal maakt met de normaal op de grenslijn.

§10.3. Multiplicatoren van Lagrange.

In deze paragraaf bekijken we het geval dat een functionaal binnen een klasse van functies V geminimaliseerd (of gemaximaliseerd) moet worden, waarbij de betreffende functies aan een randvoorwaarde moeten voldoen. Neem aan dat I en $J_1, \ldots, J_k$ functionalen zijn op een Hilbertruimte H. Vaak is $H = L_2(U)$ een functieruimte (met $U \subset \mathbf{R}^n$). Neem aan dat $I(u)$ een stationaire waarde bereikt voor een functie u onder de voorwaarde dat $J_1(u) = c_1, \ldots, J_k(u) = c_k$ waarbij $c_1, \ldots, c_k$ constanten zijn. Dan is

$$0 = \delta I(u) = \int_U \frac{\delta I}{\delta u(\mathbf{x})}\eta(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

voor die functies η waarvoor geldt dat $\displaystyle\int_U \frac{\delta J_i}{\delta u(\mathbf{x})}\eta(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0$ (met $i = 1, \ldots, k$); als we schrijven $U_j = \text{span}\{\dfrac{\delta J_j}{\delta u(\mathbf{x})}\}$ voor $j = 1, \ldots, k$, dan geldt dat $\dfrac{\delta I}{\delta u(\mathbf{x})} \in (U_1^\perp \cap \ldots \cap U_k^\perp)^\perp = U_1 + \ldots + U_k$. De laatste gelijkheid geldt omdat $U_1, \ldots, U_k$ gesloten deelruimten van H zijn. Maar dan is

$$\frac{\delta I}{\delta u(\mathbf{x})} = \lambda_1\frac{\delta J_1}{\delta u(\mathbf{x})} + \ldots + \lambda_k\frac{\delta J_k}{\delta u(\mathbf{x})}$$

voor zekere $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{R}$. $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ heten *multiplicatoren van Lagrange.* Uit de analyse van functies van meer veranderlijken kennen we dit probleem eveneens.

Een eenvoudig voorbeeld hiervan voor het geval dat H eindig-dimensionaal is, is het volgende:

Gezocht wordt het minimum, resp. maximum van de kwadratische vorm $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ op $\mathbf{R}^n$ op de eenheidsbol $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1$. We bepalen het minimum, resp. maximum van de functie $F_\lambda(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^TA\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{x}^T\mathbf{x} - 1)$ waarbij λ een parameter is en $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1$ geldt. Daar F_λ differentieerbaar is, is een noodzakelijke voorwaarde gegeven door het verdwijnen van de gradiënt ∇F_λ. Dit levert (we kunnen de matrix A zonder beperking der algemeenheid symmetrisch kiezen) $A\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x} = 0$. Een vector $\mathbf{x}$ met $\|\mathbf{x}\| = 1$ waarvoor $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ minimaal of maximaal is, is dus een eigenvector van A.

Voor een voorbeeld uit de variatierekening beschouwen we het *isoperimetrisch probleem* in het vlak. Gevraagd is van alle gesloten Jordankrommen met vaste omtrek C diegene die een zo groot mogelijke oppervlakte omsluit (een kromme heet *enkelvoudig* of *Jordankromme* als deze zichzelf niet doorsnijdt; in dit geval kan worden aangetoond dat de kromme het vlak eenduidig verdeelt in een binnengebied, een buitengebied en de kromme zelf; dit is de *stelling van Jordan*). We beschouwen de klasse van stuksgewijs gladde krommen $x = x(t), y = y(t)$ waarbij x, y stuksgewijs continu differentieerbare functies van een parameter t zijn. Zonder beperking der algemeenheid kiezen we voor t de booglengte, d.w.z. $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$. Dan is de randvoorwaarde $\int_0^C dt = \int_0^C x'(t)^2 + y'(t)^2 dt = C$. De oppervlakte ingesloten door de kromme is dan gelijk aan $A = \int_0^C y(t)x'(t)dt = -\int_0^C x(t)y'(t)dt$. Merk op dat het begin- en eindpunt gelijk is en vast gekozen kan worden. De functionaal $F = \int_0^C \big(y(t)x'(t) - \lambda(x'(t)^2 + y'(t)^2)\big)\, dt$ maximaliseren leidt tot de volgende Euler-Lagrangevergelijkingen voor $L = y(t)x'(t) - \lambda(x'(t)^2 + y'(t)^2)$:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'} = -y'(t) + 2\lambda x''(t)$$

en

$$0 = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y'} = x'(t) + 2\lambda y''(t).$$

λ elimineren uit deze twee vergelijkingen geeft $x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t) = $ constant ofwel $\kappa(t) = \dfrac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}$ is constant. $\kappa(t)$ is de *kromming* van de kromme in het punt $(x(t), y(t))$ en een (gesloten) kromme met constante kromming is een cirkel, zoals we zullen aantonen. De oplossing van het isoperimetrisch probleem is dus een cirkel. Merk op dat we de klasse van krommen die we beschouwen wel enigszins moeten inperken. Dit is een gevolg van de gebruikte methode, die alleen werkt als de functies binnen de integralen (voldoende vaak) differentieerbaar zijn.

De kromming van een kromme in het vlak. Beschouw de kromme C in het vlak met parametervoorstelling $x = x(t), y = y(t)$ voor $t \in [a, b]$. We nemen aan dat x en y tweemaal differentieerbaar naar t zijn. Het punt $(x(t), y(t))$ geven we aan met $\mathbf{x}(t)$. Door de drie punten $\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t+\Delta t)$ en $\mathbf{x}(t+2\Delta t)$ gaat precies één cirkel of een rechte (die in zekere zin is op te vatten als een cirkel met straal ∞). We laten nu $\Delta t \to 0$ gaan en kijken naar de limietcirkel. Deze raakt de kromme tot in tweede orde. De vergelijking van de limietcirkel in $\mathbf{x}(t)$ is $(\mathbf{x}(t) - \mathbf{m}, \mathbf{x}(t) - \mathbf{m}) = R^2$, waarbij $(\ ,\ )$ het standaard-inproduct is, $\mathbf{m}$ het middelpunt en R de straal (R heet de *kromtestraal* van de kromme). De kromming κ is gedefinieerd als $\pm 1/R$. Nu vinden we, door de afgeleide naar t te nemen, dat $(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t) - \mathbf{m}) = 0$, zodat we kunnen schrijven $\mathbf{m} = \mathbf{x}(t) + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}(t)$ waarbij $\mathbf{n}(t)$ een normaalvector op de kromme is met norm 1. Meer expliciet, als $\mathbf{x}'(t) = (x'(t), y'(t))$, dan is $\mathbf{n}(t) = \dfrac{(-y'(t), x'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$. Nogmaals de afgeleide nemen geeft $(\mathbf{x}''(t), \mathbf{x}(t) - \mathbf{m}) + (\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}'(t)) = 0$ dus

$$\kappa = \frac{(\mathbf{x}''(t), \mathbf{n}(t))}{(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}'(t))} = \frac{-x''(t)y'(t) + x'(t)y''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}. \tag{10.7}$$

Propositie: Als κ constant is, dan is de kromme een (stuk van een) cirkel of een rechte.

Bewijs: Neem eerst aan dat $\kappa \neq 0$. Kies voor de parameter t de booglengte. Dan is $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$ en we kunnen dan schrijven $x'(t) = -\sin\phi(t), y'(t) = \cos\phi(t)$. Invullen in $x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = \kappa$ geeft dan $\phi'(t) = \kappa$ is constant en dus is $x'(t) = -\sin\kappa t, y'(t) = \cos\kappa t$ en $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{\kappa}\cos\kappa t + x_0 \\ y(t) = \frac{1}{\kappa}\sin\kappa t + y_0 \end{cases}$. Dit is inderdaad de parametervoorstelling van een cirkelboog. Het geval $\kappa = 0$ wordt aan de lezer overgelaten. $\diamond$

§**10.4. Het geval van vrije randvoorwaarden.** In de vorige paragrafen hebben we een aantal voorbeelden gezien waarin de functionaal $F(f) = \int_\Omega L(f(\mathbf{x}), f'(\mathbf{x}), \mathbf{x})d\mathbf{x}$ wordt gemaximaliseerd of geminimaliseerd over een klasse van functies f waarbij de waarde van f op de rand $\partial\Omega$ is voorgeschreven. Dit leidde tot de d.v. van Euler-Lagrange (10.5). In het geval dat er de randwaarden van f niet zijn voorgeschreven, moeten we de volledige vorm van (10.3), resp. (10.4) gebruiken. We volstaan met een voorbeeld.

Beschouw een elastische snaar van homogeen materiaal die in rust horizontaal hangt en in transversale richting kan bewegen. Laat de snaar lengte L hebben. We geven met $(x, y(x))$ de positie van de punten op de snaar aan, waarbij $0 \leq x \leq L$ en $y(x)$ klein is. Neem aan dat de snaar alleen in de y-richting kan bewegen. Om de bewegingsvergelijking af te leiden minimaliseren we de actie. Deze heeft dezelfde vorm als in voorbeeld 3 van §10.2, nl.

$$S(y) = \int_0^L \int dt\mathcal{L} = \int_0^L dx \int dt \left(\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}Y\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right).$$

Indien de actie minimaal is, geldt volgens een variant op (10.4) dat

$$S(y+\epsilon g) = S(y)+\epsilon\int dt\int_0^L \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} - \partial_x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x y)} - \partial_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t y)}\right)g(x,t)+\epsilon\int dt\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x y)}g(x,t)\Big|_0^L+O(\epsilon^2),$$

en aangezien $g(x,t)$ geheel willekeurig is, ook in de randpunten $x = 0$ en $x = L$, geldt zowel de Euler-Lagrangevergelijking $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} - \partial_x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x y)} - \partial_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t y)} = 0$ als $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x y)}(0) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x y)}(L) = 0$. De Euler-Lagrangevergelijking geeft weer de bewegingsvergelijking $\mu\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - Y\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0$ en de tweede vergelijking levert de bijbehorende randvoorwaarden $y'(0) = y'(L) = 0$.

Opmerking. Analoog aan het geval van stationaire punten van gewone functies kunnen we een tweede functionele afgeleide definiëren indien $F(f)$ voor $f \in V$ en voor kleine ϵ en voldoende algemene functies g te schrijven is als

$$F(f+\epsilon g) - F(f) = \epsilon\int_\Omega \frac{\delta F}{\delta f(x)}g(x)dx + \frac{1}{2}\epsilon^2\int_\Omega\int_\Omega \frac{\delta^2 F}{\delta f(x)\delta f(y)}g(x)g(y)dxdy + o(\epsilon^2).$$

Hierbij is $\frac{\delta^2 F}{\delta f(x)\delta f(y)}$ de tweede functionele afgeleide. Aan het teken ervan kunnen we zien of $F(f)$ voor f een (lokaal) maximum dan wel minimum aanneemt (dan wel geen van beide). We gaan hier verder niet op in.

§10.5. Geodeten.

We gebruiken de Euler-Lagrange vergelijking om te laten zien dat de geodeten (lokaal) de krommen van kortste lengte op een differentieerbare variëteit zijn.

In hoofdstuk 7 hebben we gezien dat als $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ een parametrisatie is van een kromme γ, de kromme een geodeet is dan en slechts dan als de coördinaten $x^i(t)$ voldoen aan

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = -\frac{dx^i}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^{-2} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{10.8}$$

Hierbij is s de booglengteparameter. Als t zelf een affiene parameter is, dus $t = as + b$ voor constante a, b, dan is het rechterlid nul. De Christoffelsymbolen Γ^i_{jk} zijn gedefinieerd in termen van de metrische tensor als

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{i\ell}(-\partial_\ell g_{jk} + \partial_j g_{\ell k} + \partial_k g_{j\ell}).$$

De partiële afgeleide naar i geven we aan als in hoofdstuk 7 d.m.v. ∂_i. De lengte van het krommestuk $\{\gamma(t); a \le t \le b\}$ is gegeven door $L_\gamma = \int_a^b \sqrt{g_{jk}x'^j(t)x'^k(t)}dt$ waarbij $x'^j(t) = \frac{dx^j}{dt}$. Laat $L = \sqrt{g_{jk}x'^j(t)x'^k(t)}$ de Lagrangiaan zijn. Verder laten we het begin- en eindpunt van de kromme vast en kiezen $a = 0$, $b = 1$. De kromme met beginpunt $\gamma(0)$ en eindpunt $\gamma(1)$ met korste lengte is dus een oplossing van de n Euler-Lagrangevergelijkingen

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2L}\frac{\partial L^2}{\partial x'^i}\right) - \frac{1}{2L}\frac{\partial L^2}{\partial x^i} =$$

$$= \frac{1}{2L}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L^2}{\partial x'^i} - \frac{\partial L^2}{\partial x^i}\right) - \frac{1}{2L^2}\frac{\partial L^2}{\partial x'^i}\cdot\frac{dL}{dt} =: (I) - (II)$$

waarbij we de twee termen uit het rechterlid met (I) resp. (II) aangeven. We berekenen (I) en (II) afzonderlijk:

$$2L\cdot(I) = \frac{d}{dt}(2g_{i\ell}x'^\ell) - \partial_i g_{jk}x'^j x'^k = 2\partial_k g_{ij}x'^j x'^k + 2g_{i\ell}x''^\ell - \partial_i g_{jk}x'^j x'^k =$$

$$= 2g_{i\ell}x''^\ell + (-\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} + \partial_k g_{ij})x'^j x'^k = 2g_{i\ell}\left(x''^\ell + \Gamma^\ell_{jk}x'^j x'^k\right).$$

Merk op dat de term (I) precies gelijk is aan $g_{i\ell}/L$ maal het linkerlid van de geodetenvergelijking (10.8) (waarbij i vervangen is door ℓ). We tonen nu aan dat (II) precies gelijk is aan $g_{i\ell}/L$ maal het rechterlid van (10.8) (waarbij weer i door ℓ is vervangen).

Als s de booglengteparameter is, dan is $Ldt = ds$ en dus is $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{L}$ en $\frac{d^2t}{ds^2} = -\frac{1}{L^2}\frac{dL}{dt}\frac{dt}{ds}$. Verder is

$$\frac{\partial L^2}{\partial x'^i} = 2g_{i\ell}\frac{dx^\ell}{dt}.$$

Dus is

$$-\frac{g_{i\ell}}{L}\frac{dx^\ell}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^{-2} = \frac{1}{2}\frac{\partial L^2}{\partial x'^i}\cdot\frac{1}{L^2}\cdot\frac{dL}{dt} = (II).$$

Conclusie: de Euler-Lagrangevergelijking is inderdaad de geodetische vergelijking (10.8).

Opmerking: Als t een affiene parameter is, dan is $\dfrac{dL}{dt} = 0$, en dan is dus (II)=0. De geodetenvergelijking is dan equivalent met (I)=0 en dus met

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L^2}{\partial x'^i} - \frac{\partial L^2}{\partial x^i} = 0. \tag{10.9}$$

Maar (10.9) is precies de Euler-Lagrangevergelijking voor $L^2 = g_{jk}x'^j(s)x'^k(s)$. Dit geeft een snelle manier om de geodetenvergelijking te vinden, en i.h.b. de Christoffelsymbolen. We geven als voorbeeld het geval van poolcoördinaten in $\mathbf{R}^2$:

Voorbeeld: De metrische tensor in poolcoördinaten is $g = dr \otimes dr + r^2 d\phi \otimes d\phi$, dus is $L^2 = r'(s)^2 + r(s)^2\phi'(s)^2$. De Euler-Lagrangevergelijkingen voor L^2 zijn:

$$0 = \frac{d}{ds}\frac{dL^2}{dr'} - \frac{dL^2}{dr} = 2r''(s) - 2r(s)\phi'(s)^2$$

en

$$0 = \frac{d}{ds}\frac{dL^2}{d\phi'} - \frac{dL^2}{d\phi} = \frac{d}{ds}2r(s)^2\phi'(s) = 2r(s)^2\phi''(s) + 4r(s)r'(s)\phi'(s).$$

De geodetenbvergelijkingen zijn dus

$$r''(s) - r(s)\phi(s)^2 = 0, \qquad \phi''(s) + \frac{2}{r(s)}r'(s)\phi'(s) = 0.$$

We lezen dus direct de Christoffelsymbolen af:

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -r, \quad \Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r}$$

en in alle andere gevallen is $\Gamma^i_{jk} = 0$.

§10.6. Eigenwaardenproblemen.

Vaak zijn differentiaalvergelijkingen Euler-Lagrangevergelijkingen van een of andere functionaal. Zo is de vergelijking van Laplace $\Delta u = 0$ de Euler-Lagrangevergelijking bij de functionaal $I(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int (\nabla u)^2 d^n\mathbf{x}$. De Sturm-Liouvillevergelijking

$$\mathcal{L}(u); = \frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx}) + q(x)u(x) + \lambda r(x)u(x) = 0, \qquad x \in (a,b) \tag{10.10}$$

is de Euler-Lagrangevergelijking bij de functionaal $I_\lambda(u) = \displaystyle\int_a^b p(x)u'(x)^2 - q(x)u(x)^2 - \lambda r(x)u(x)^2\ dx$. We kunnen echter λ ook als een Lagrangemultiplicator opvatten. De vergelijking (10.10) is dan de Euler-Lagrangevergelijking van de functionaal $I(u) = \displaystyle\int_a^b p(x)u'(x)^2 - q(x)u(x)^2\ dx$ onder de voorwaarde dat $J(u) = \displaystyle\int_a^b r(x)u(x)^2\ dx$ constant is. De laatste voorwaarde is feitelijk een normeringsvoorwaarde. Het variatieprobleem is dus equivalent met het zoeken naar een stationaire waarde van de functionaal $K(u) = \dfrac{I(u)}{J(u)} = \dfrac{\int_a^b p(x)u'(x)^2 - q(x)u(x)^2\ dx}{\int_a^b r(x)u(x)^2\ dx}$.

Als we de vergelijking (10.10) met $u(x)$ vermenigvuldigen en vervolgens partiële integratie toepassen, zien we dat in het geval van Dirichlet-, Neumann- of periodieke randvoorwaarden (zodat $p(x)u(x)u'(x)\big|_a^b = 0$) de eigenwaarde λ gelijk is aan een stationaire waarde van $K(u)$. In het bijzonder is de kleinste eigenwaarde λ_1 van het S.L.probleem gelijk aan het minimum van $K(u)$ waarbij u ligt in het domein $D(\mathcal{L})$ van de differentiaaloperator $\mathcal{L}$ (op $L_2(a,b)$) en tevens aan de randvoorwaarden in $x = a$ resp. $x = b$ voldoet. Omdat de eigenfuncties bij de verschillende eigenwaarden orthogonaal zijn (t.a.v. het inproduct met gewichtsfunctie $r(x)$) kunnen we de volgende eigenwaarden als volgt karakteriseren: de op een na kleinste eigenwaarde λ_2 is het minimum van $K(u)$ genomen over alle functies uit $D(\mathcal{L})$ die aan de randvoorwaarden voldoen en tevens orthogonaal zijn met de eigenfuncties bij eigenwaarde λ_1. Immers leidt het minimaliseren van de functionaal $I(u)$ onder de voorwaarden dat $J(u) = \displaystyle\int_a^b r(x)u(x)^2dx = 0$ en $J_1(u) = \displaystyle\int_a^b r(x)u(x)u_1(x)dx = 0$ tot de Euler-Lagrangevergelijking

$$(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) + \lambda r(x)u(x) + \mu r(x)u_1(x) = 0.$$

Door deze vergelijking te vermenigvuldigen met $u_1(x)$ en te integreren over $[a,b]$ vinden we $\mu \displaystyle\int_a^b r(x)u_1(x)^2dx = 0$, maar dit is alleen mogelijk als $\mu = 0$ zodat de vergelijking reduceert tot de eigenwaardenvergelijking

$$(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) + \lambda r(x)u(x) = 0.$$

Een stationaire waarde wordt dus verkregen voor $u = u_2$ een eigenfunctie. De bijbehorende eigenwaarde λ_2 is de minimale waarde van $K(u)$ onder de conditie dat u orthogonaal is met u_1 en aan de randvoorwaarden voldoet. Analoog is de k-de eigenwaarde λ_k het minimum van $K(u)$ onder de voorwaarde dat u aan de randvoorwaarde voldoet en orthogonaal is met de eigenfuncties $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$ bij de resp. eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}$.

De methode van Rayleigh-Ritz. Op het voorgaande is een methode gebaseerd om de kleinste eigenwaarden af te schatten: laat $v \in D(\mathcal{L})$ een functie zijn die aan de randvoorwaarden van het eigenwaardenprobleem voldoet, dan is $K(v)$ een bovengrens voor λ_1. Door i.p.v. een enkele functie v een hele parameterfamilie van functies $v_{a,b,\ldots}$ te nemen kunnen we de eigenwaarde nog beter afschatten.

Voorbeeld: Beschouw het S.L.probleem $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$ op $[0,\pi]$. Dan is $K(v) = \dfrac{\int_0^\pi v'^2dx}{\int_0^\pi v^2dx}$. Laat nu $v(x) = x(\pi - x)$. Dan is $K(v) = \dfrac{10}{\pi^2} = 1{,}013$. Het feitelijke minmum is gelijk aan 1 zoals we in dit geval expliciet kunnen zien door het Sturm-Liouvilleprobleem op te lossen.

Merk op dat er een andere karakterisering mogelijk is voor de eigenwaarde λ_n:

$$\lambda_n = \min(\max_{u\neq 0, u\in S, \dim(S)=n} K(u)) \tag{10.10'}$$

waarbij S een n-dimensionale lineaire deelruimte van de vectorruimte van tweemaal differentieerbare functies op (a,b) is. De karakterisering (10.10') staat bekend als het *minimax-principe.* Met behulp van dit principe kunnen we een afschatting en een asymptotische uitdrukking voor λ_n vinden. Het is het eenvoudigst om een Liouville-transformatie toe te passen en het eigenwaardenprobleem $z''(\xi) + (-Q(x(\xi)) + \lambda)z(\xi) = 0$ (met dezelfde eigenwaarden!) te bekijken - waarbij de randvoorwaarden $R_0 z = 0, R_\beta z = 0$ volgen uit de vorm van de Liouville-transformatie (vergelijk hoofdstuk IV: laat $A = \sup_{[a,b]} Q(x)$ zijn en beschouw de operatoren L_-, L_0 en L_+ zodanig dat $L_- z = z'' + Az$, $L_0 z = z'' - Q(x(\xi))z$ en $L_+ z = z'' - Az$. Laat verder $\lambda_n^-, \lambda_n, \lambda_n^+$ de n-de eigenwaarden zijn van de S.L systemen $z''(\xi) + (A+\lambda)z(\xi) = 0$, $z''(\xi) + (-Q(x(\xi)) + \lambda)z(\xi) = 0$, resp. $z''(\xi) + (-A+\lambda)z(\xi) = 0$ met de reguliere randvoorwaarden $R_a z = R_b z = 0$. Omdat voor elke (tweemaal differentieerbare) z geldt dat $R_{L_+}(z) \le R_{L_0}(z) \le R_{L_-}(z)$, is ook $\lambda_n^- \le \lambda_n \le \lambda_n^+$. Anderzijds is eenvoudig na te gaan dat $\lambda_n^\pm = n^2\pi^2/\beta^2 + O(1)$. In het geval dat de randvoorwaarden $z(0) = z(\beta) = 0$ zijn is $\lambda_n^\pm = \pm A + n^2\pi^2/\beta^2$ en de eigenfuncties $y_n(x) = \sin n\pi x/\beta$. Voor andere randvorwaarden gelden analoge resultaten. Dus is ook $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{\beta^2} + O(1)$ als $n \to \infty$. In het bijzonder geldt dat $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \to \infty$ als $n \to \infty$.

Opmerking: Ook integraalvergelijkingen kunnen Euler-Lagrangevergelijkingen zijn: beschouw als voorbeeld het geval van een Fredholmse integraalvergelijking met symmetrische kern $K(x,y) = K(y,x)$. Laat de functionaal I gegeven zijn door $I(f) = \displaystyle\int_a^b \int_a^b K(x,y)f(x)f(y)dxdy$. De Euler-Lagrangevergelijking voor een stationaire waarde van $I(f)$ onder de voorwaarde dat $\displaystyle\int_a^b f(x)^2 dx$ constant is, is de Fredholmse integraalvergelijking $f(x) = \lambda \displaystyle\int_a^b K(x,y)f(y)dy$.

§**10.7. Lagrangiaan en symmetrie. De stelling van Noether.** Een grote klasse van fysische (klassieke en quantum-)systemen beantwoordt aan het principe van minimale actie (dit wordt ook wel het principe van Hamilton genoemd): bij het systeem definiëren we een actie $S = \int \mathcal{L}(q_i, \partial_j q_i, x^k) d\mathbf{x}$ waarbij $\mathcal{L}$ de Lagrangiaan (of Lagrange-dichtheid) is en de veldgrootheden (of gegeneraliseerde coördinaten) q_i een functie zijn van de x^j. Uit de eis dat de actie minimaal is volgen de bijbehorende Euler-Lagrangevergelijkingen; deze leveren de veld- en bewegingsvergelijkingen. Bij het opstellen van de Lagrangiaan van een systeem spelen symmetrieprincipes een essentiële rol. We zullen dit toelichten aan de hand van een klassiek vrij deeltje. We bekijken eerst het niet-relativistische geval. De Lagrangiaan L hangt af van de ruimtelijke positie x^i $(i = 1,2,3)$, de snelheid $\dot{x}^i$ en (als evolutieparameter) de tijd t. De actie heeft dan de vorm $S = \int L(x^i, \dot{x}^i, t)dt$ (het feit dat L niet van de tweede en hogere afgeleiden afhangt en dat het systeem dus bepaald is door de posities en de snelheden, is een ervaringsfeit). We eisen nu dat het systeem en daarmee de Lagrangiaan een aantal symmetrieën bezit: (i.) Invariantie onder translaties in de tijd. Dit betekent dat L niet expliciet van t afhangt. (ii.) Invariantie onder translaties in de ruimte. Dit betekent dat L niet expliciet van x^i afhangt. L is dus een functie van alleen de snelheden. (iii.) Isotropie of rotatiesymmetrie: de vorm van L is invariant onder rotaties. Dit betekent dat $L(\dot{x}^i)$ alleen van scalaire grootheden die kunnen worden gevormd uit $\dot{x}^i$ afhangt. De enige dergelijke scalaire grootheden zijn functies van $\dot{\mathbf{x}}^2$. (iv.) invariantie onder Galilei-transformaties $x^i \to x^i + v^i t$ (waarbij v^i constant is). Laat $X = \dot{\mathbf{x}}^2/2$. De Euler-Lagrangevergelijking voor $L = \tilde{L}(X)$ is

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\tilde{L}}{dX}\dot{x}^i\right) = \frac{d\tilde{L}}{dX}\ddot{x}^i + \frac{d^2\tilde{L}}{dX^2}(\dot{\mathbf{x}}\cdot\ddot{\mathbf{x}})\dot{x}^i.$$

Onder een Galileitransformatie $\dot{x}^i \to \dot{x}^i + v^i$ en $\ddot{x}^i \to \ddot{x}^i$. Invariantie van de E.L.vergelijking geeft nu $\dfrac{d^2\tilde{L}}{dX^2} = 0$, dus $\tilde{L} = CX$ voor C een constante en $L = \frac{1}{2}C\dot{\mathbf{x}}^2$. Analoog betekent voor een vrij relativistisch deeltje invariantie onder (orthochrone) Lorentztransformaties dat de Lagrangiaan een functie is van $\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$.

De *stelling van Noether* legt een verband tussen een continue symmetrie in de Lagrangiaan en het bestaan van een behouden grootheid. Neem aan dat de Lagrangiaan L afhangt van onafhankelijke variabelen x^i, afhankelijke variabelen $y^k(x^i)$ en eerste partiële afgeleiden $\partial_j y^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^j}$. Een continue symmetriegroep wordt voortgebracht door infinitesimale transformaties. Zo wordt een rotatie in E_2 om de oorsprong O van het coördinatenstelsel voortgebracht door de infinitesimale rotatie $x^1 \to x^1 - \epsilon x^2$, $x^2 \to x^2 + \epsilon x^1$. We beschouwen algemenere symmetriegroepen waarin zowel de onafhankelijke variabelen x^i als de afhankelijke y^k transformeren. De wijze waarop $\partial_j y^k$ transformeren hangt dan af van het transformatiegedrag van zowel x^i als y^k. We bekijken voor het gemak eerst het geval van één onafhankelijke en één afhankelijke variabele, dus $L = L(y(x), y'(x), x)$. Beschouw dus een infinitesimale transformatie

$$x \to \tilde{x} = x + \epsilon\xi(x), \qquad y \to \tilde{y} = y + \epsilon\eta(x). \tag{10.11a}$$

Hierbij is ϵ een kleine parameter. Dan is tot op eerste orde in ϵ

$$\tilde{y}'(\tilde{x}) = \frac{d}{dx}(y(x)+\epsilon\eta(x))\frac{dx}{d\tilde{x}} = (y'(x)+\epsilon\eta'(x))(1-\epsilon\xi'(x)) = y'(x)+\epsilon(\eta'(x)-\xi'(x)y'(x)). \tag{10.11b}$$

Onder de transformatie (10.11) gaat de integraal $\int_\Omega L(y, y', x)dx$ over in $\int_{\tilde{\Omega}} L(\tilde{y}(\tilde{x}), \tilde{y}'(\tilde{x}), \tilde{x})d\tilde{x}$. Hierbij is $\tilde{\Omega}$ het beeld van Ω onder de transformatie $x \to \tilde{x}$. We nemen van de beschouwde transformatie aan dat deze regulier en omkeerbaar is, zodat met iedere $x \in \Omega$ precies één $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}$ correspondeert. In het algemeen zijn beide integralen niet gelijk. Nu geldt het volgende resultaat:

Stelling (Noether voor 1 dimensie): Als onder de reguliere en omkeerbare transformatie (10.11) de integralen $\int_\Omega L(y, y', x)dx$ en $\int_{\tilde{\Omega}} L(\tilde{y}(\tilde{x}), \tilde{y}'(\tilde{x}), \tilde{x})d\tilde{x}$ voor willekeurige $\Omega \subset \mathbf{R}$ gelijk zijn en als tevens de Euler-Lagrangevergelijkingen voor L gelden, dan is

$$\frac{d}{dx}\left(\xi(x)L + \frac{\partial L}{\partial y'}\eta(x) - \xi(x)y'(x)\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0. \tag{10.12}$$

(De grootheid in (10.12) tussen haakjes is een *behouden grootheid.*)

Bewijs: We laten in de onderstaande formules de expliciete x-afhankelijkheid van y, η, ξ weg.

$$\int_{\tilde{\Omega}} L(\tilde{y}(\tilde{x}), \tilde{y}'(\tilde{x}), \tilde{x})d\tilde{x} = \int_\Omega L(\tilde{y}(\tilde{x}), \tilde{y}'(\tilde{x}), \tilde{x})(1+\epsilon\xi'(x))dx =$$

$$= \int_\Omega L(y+\epsilon\eta, y'+\epsilon(\eta'-\xi'y'), x+\epsilon\xi)(1+\epsilon\xi')dx =$$

$$= \int_\Omega L(y, y', x)(1+\epsilon\xi') + \epsilon\int_\Omega \left(\frac{\partial L}{\partial y}\eta + \frac{\partial L}{\partial y'}(\eta'-\xi'y') + \frac{\partial L}{\partial x}\xi\right)dx =$$

$$= \int_\Omega L(y, y', x)dx + \epsilon\int_\Omega \frac{d}{dx}\left(\xi L + \eta\frac{\partial L}{\partial y'} - \xi y'\frac{\partial L}{\partial y'}\right)dx,$$

waarbij in de laatste stap de Euler-Lagrangevergelijking $\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}$ is gebruikt en

$$\frac{dL}{dx} = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial y}y' + \frac{\partial L}{\partial y'}y'' = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}y'\right).$$

Zo vinden we dat $\int_\Omega \frac{d}{dx}\left(\xi L + \frac{\partial L}{\partial y'}\eta - \xi y'\frac{\partial L}{\partial y'}\right)dx = 0$ en (10.12) volgt nu uit het feit dat Ω willekeurig is.

We bekijken een aantal toepassingen:

1. Laat de Lagrangiaan $L = L(x(t), \dot{x}(t), t)$ afhangen van de tijd, de posities en de snelheid. t speelt hier dus de rol van onafhankelijke variable, en $x(t)$ van afhankelijke variabele. Neem nu aan dat L invariant is onder translaties $t \to t + a$ in de tijd, d.w.z. dat L niet expliciet van t afhangt. De bijbehorende infinitesimale transformatie is $t \to t + \epsilon$, $x \to x$, dus $\xi = 1$, $\eta = 0$. Dan is $-\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt}\left(L - \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$, waarbij de *Hamiltoniaan* $H = L - \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ de energie van het systeem weergeeft.
2. Laat L als in (1) en neem aan dat L invariant is onder ruimtelijke translaties $x \to x + a$. Nu geldt $\eta = 1$, $\xi = 0$ en volgens de stelling van Noether is $\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0$. $P = \frac{\partial L}{\partial y'}$ is de impuls van het systeem.

In het algemeen hangt L zowel van meerdere onafhankelijke variabelen x^i als van meerdere afhankelijke variabelen $y^j = y^j(\mathbf{x})$ af. In het algemene geval beschouwen we symmetriegroepen voortgebracht door de infinitesimale transformaties

$$x^i \to \tilde{x}^i = x^i + \epsilon\xi^i(\mathbf{x}), \qquad y^j \to \tilde{y}^j = y^j + \epsilon\eta^j(\mathbf{x}) \tag{10.13a}$$

waarbij voor de partiële afgeleiden geldt

$$\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \to \frac{\partial \tilde{y}^j}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\partial}{\partial x^k}(y^j + \epsilon\eta^j) =$$

$$= \left(\delta_i^k - \epsilon\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^k} + \epsilon\frac{\partial \eta^j}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} + \epsilon\left(\frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} - \frac{\partial y^j}{\partial x^k}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i}\right). \tag{10.13b}$$

Verder geldt voor de differentialen

$$dx^i \to d\tilde{x}^i = dx^i + \epsilon\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}dx^k = \left(\delta_k^i + \epsilon\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}\right)dx^k$$

en dus voor de volumevorm

$$dx^1 \dots dx^n \to d\tilde{x}^1 \dots d\tilde{x}^n = \left(1 + \epsilon\frac{\partial \xi^k}{\partial x^k}\right)dx^1 \dots dx^n.$$

Nu gaat onder de transformatie (10.13) de integraal $\int_\Omega L(y^j, \partial_i y^j, x^i)dx^1 \dots dx^n$ over in $\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{L}(\tilde{y}^j, \partial_i \tilde{y}^j, \tilde{x}^i)d\tilde{x}^1 \dots d\tilde{x}^n$. Analoog aan het eendimensionale geval hebben we het volgende resultaat:

Stelling (Noether voor meer dimensies): Als onder de reguliere en omkeerbare transformatie (10.13) voor willekeurige $\Omega \in \mathbf{R}^n$ geldt dat

$$\int_\Omega L(y^j, \partial_i y^j, x^i) dx^1 \dots dx^n = \int_{\tilde{\Omega}} L(\tilde{y}^j, \partial_i \tilde{y}^j, \tilde{x}^i) d\tilde{x}^1 \dots d\tilde{x}^n$$

en als tevens de Euler-Lagrangevergelijkingen voor L gelden, dan is

$$\frac{dJ^i}{dx^i} := \frac{d}{dx^i}\left(\xi^i L + \eta^j \frac{\partial L}{\partial(\partial_i y^j)} - \xi^k \partial_k y^j \frac{\partial L}{\partial(\partial_i y^j)}\right) = 0. \tag{10.14}$$

Merk op: Als het aantal onafhankelijke variabelen groter is dan 1, dan staat in het linkerlid een divergentie. J^i heet de *Noetherstroom* behorende bij de transformatiegroep (10.13). Merk verder op dat we i.p.v. de notatie $\frac{\partial}{\partial x^i}$ de notatie $\frac{d}{dx^i}$ gebruiken om de totale afgeleide *naar* x^i aan te geven.

Bewijs: Dit verloopt geheel analoog aan het eendimensionale geval. We schrijven $d^n\mathbf{x}$ voor $dx^1 \dots dx^n$:

$$\int_{\tilde{\Omega}} L(\tilde{y}^j, \partial_i \tilde{y}^j, \tilde{x}^i) d^n\tilde{\mathbf{x}} = \int_\Omega L(y^j + \epsilon\eta^j, \partial_i y^j + \epsilon \partial_i \eta^j - \epsilon(\partial_k y^j)(\partial_i \xi^k), x^i + \epsilon \xi^i)(1 + \epsilon \partial_\ell \xi^\ell) d^n\mathbf{x} =$$

$$= \int_\Omega L(y^j, \partial_i y^j, x^i) d^n\mathbf{x} + \epsilon \int_\Omega \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\xi^i + \frac{\partial L}{\partial y^j}\eta^j + \frac{\partial L}{\partial(\partial_i y^j)}(\partial_i \eta^j - \partial_k y^j \partial_i \xi^k) + L \partial_\ell \xi^\ell\right) d^n\mathbf{x}.$$

We gebruiken nu de Euler-Lagrangevergelijkingen $\frac{d}{dx^k}\frac{\partial L}{\partial(\partial_k y^j)} = \frac{\partial L}{\partial y^j}$, waaruit volgt dat

$$\frac{dL}{dx^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i} + \frac{\partial L}{\partial y^j}\partial_i y^j + \frac{\partial L}{\partial(\partial_k y^j)}\partial_i \partial_k y^j = \frac{\partial L}{\partial x^i} + \frac{d}{dx^k}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_k y^j)}\partial_i y^j\right).$$

Zo vinden we

$$\int_{\tilde{\Omega}} L(\tilde{y}^j, \partial_i \tilde{y}^j, \tilde{x}^i) d^n\tilde{\mathbf{x}} = \int_\Omega L(y^j, \partial_i y^j, x^i) d^n\mathbf{x} + \epsilon \int_\Omega \frac{d}{dx^i}\left(\xi^i L + \eta^j \frac{\partial L}{\partial(\partial_i y^j)} - \xi^k \partial_k y^j \frac{\partial L}{\partial(\partial_i y^j)}\right) d^n\mathbf{x}.$$

Aangezien het gebied Ω willekeurig is, is de integrand nul en hieruit volgt (10.14).

We bekijken weer een aantal toepassingen:

1. Voor een systeem bestaande uit een deeltje in n dimensies is de Lagrangiaan $L = L(x^i(t), \dot{x}^i(t), t)$ afhankelijk van de tijd, de posities en de snelheid. In dit geval is de coördinatenruimte n-dimensionaal. Als L invariant is onder ruimtelijke translaties $x^i \to x^i + a^i$ in de x^i-richting, dan zijn $\eta^j = \delta^j_i$ en $\xi = 0$. Dus is $\frac{dP^i}{dt} = 0$ waarbij $P^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$ de i-e component van de impuls is.
2. De Lagrangiaan van (1) kunnen we ook opvatten als de Lagrangiaan van een systeem van n deeltjes in 1 dimensie met posities $x^i(t)$. Als L invariant is onder een ruimtelijke translatie van het gehele systeem, dan is $\xi = 0$ en $\eta^j = 1$ voor alle j. In dit geval is de totale impuls $P = \sum_{i=1}^n P^i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$ behouden, d.w.z. $\frac{dP}{dt} = 0$.

3. Laat $L = L(x^i(t), \dot{x}^i(t), t)$ de Lagrangiaan zijn van een deeltje in drie dimensies, en neem aan dat L invariant is onder rotaties om de x^3-as. De bijbehorende transformatiegroep wordt voortgebracht door de transformaties $x^1 \to x^1 - \epsilon x^2$, $x^2 \to x^2 + \epsilon x^1$ en $x^3 \to x^3$, d.w.z. $\xi = 0$, $\eta^1(\mathbf{x}) = -x^2$, $\eta^2(\mathbf{x}) = x^1$, $\eta^3 = 0$. Dan is $\dfrac{dL^3}{dt} = 0$ voor $L^3 = x^1 P^2 - x^2 P^1$. L^3 is de z-component van het impulsmoment.
4. Als laatste toepassing bekijken we het geval van een *veld* $y^\lambda(t, x^i)$ waarbij x^i voor $i = 1, \ldots, n$ de ruimtelijke coördinaten zijn. Een voorbeeld is de Lagrangedichtheid $\mathcal{L}$ in voorbeeld 3 van §10.2. Hierbij is $\mathcal{L} = \mathcal{L}(y(t,x), \partial_t y, \partial_x y)$ en hangt dus niet expliciet af van de onafhankelijke variabelen x en t. In zo'n geval is $\mathcal{L}$ invariant onder de transformatiegroepen (10.13) waarbij $\xi^\mu = \delta^\mu_\nu$ is voor $\nu = 0, \ldots, n$ en $\eta^\mu = 0$. Hierbij gebruiken we voor t de notatie x^0. Volgens de stelling van Noether is dan
$$\partial_\mu T^\mu_\nu = \partial_\mu \left(\partial_\nu y^\lambda \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu y^\lambda)} - \delta^\mu_\nu L \right) = 0 \quad (\nu = 0, \ldots, n).$$
De tensor T^μ_ν heet de *energie-impulstensor*. Voor vaste ν volgt uit de stelling van Gausz (onder de aannamen dat het veld voldoende snel naar 0 gaat als $\|\mathbf{x}\| \to \infty$)
$$0 = \int_{\mathbf{R}^n} \partial_\mu T^\mu_\nu d^n\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}^n} \partial_0 T^0_\nu d^n\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}^n} T^0_\nu d^n\mathbf{x}$$
zodat $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} T^0_\nu d^n\mathbf{x}$ voor $\nu = 0, \ldots, n$ behouden grootheden zijn. T^0_0 komt overeen met de energiedichtheid van het veld, en T^0_i $(i = 1, \ldots, n)$ met de componenten van de impulsdichtheid van het veld. De andere componenten T^μ_j hebben te maken met energie- en impulsfluxdichtheid.

De stelling van Noether is te generaliseren naar het geval dat de Lagrangiaan ook afhangt van tweede en hogere afgeleiden van de afhankelijke variabelen y^i maar in dit geval is een het stuk moeilijker om een uitdrukking voor de behouden grootheid aan te geven. In de meeste toepassingen kunnen we ons beperken tot het geval van hoogstens eerste afgeleiden.