VI. Tensoralgebra.

§6.1. De duale van een vectorruimte.

Laat V een eindig-dimensionale reële of complexe vectorruimte zijn. De vectorruimte $\mathcal{L}(V,K)$ van lineaire afbeeldingen van V naar het lichaam van scalairen $K = \mathbf{R}$ of $\mathbf{C}$ heet de *duale* vectorruimte van v. We noteren deze als V^*. Als $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ een basis is van V dan laat $\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n \in V^*$ gegeven zijn door $\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j$. Hierbij is δ^i_j het Kronecker-symbool, dus $\delta^i_j = 1$ als $i = j$ en $\delta^i_j = 0$ als $i \neq j$. We tonen aan dat $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ een basis is van V^*. Laat hiertoe $f \in V^*$. Dan is $f = \sum_{i=1}^n f(\mathbf{e}_i)\mathbf{e}^i$. Verder, als $\sum_{j=1}^n a_j \mathbf{e}^j = 0$, dan is

$$0 = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{e}^j(\mathbf{e}_k) = \sum_{j=1}^n a_j \delta^j_k = a_k$$

en dus is $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ lineair onafhankelijk. We noemen $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ de *duale basis* van $\{e_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. I.h.b. is dus $\dim(V^*) = \dim(V)$.

De duale van V^* geven we aan met V^{**}. Er geldt dat V en V^{**} op een kanonieke manier isomorf zijn: zij immers $v \in K$. Dan is de afbeelding $v^\sharp : V^* \to K$ gegeven door $v^\sharp(f) = f(v)$ een lineaire afbeelding en dus een element van V^{**}. De afbeelding die v afbeeldt op $v^\sharp$ is een injectieve lineaire afbeelding van V naar V^{**}, en omdat $\dim(V) = \dim(V^{**})$, een vectorruimte-isomorfisme van V op V^{**}. Deze afbeelding heet natuurlijk of kanoniek omdat deze niet afhangt van speciale keuzen (bijv. van een basis).

§6.2. Tensoren en tensorproduct.

Laat V weer een eindig-dimensionale reële of complexe vectorruimte zijn van dimensie n. Een *tensor van rang* (r,s) op V is een multilineaire afbeelding

$$T : V^* \times \ldots \times V^* \times V \times \ldots \times V \to K$$

waarbij K het lichaam van de scalairen is. Hierbij wordt r keer het product over V^* genomen en s keer over V. (Multilineair betekent dat de afbeelding lineair is in elke component.) De tensoren van rang (r,s) over V vormen een vectorruimte $\mathcal{T}^r_s(V)$. Meestal nemen we $V = \mathbf{R}^n$ of $\mathbf{C}^n$ en schrijven dan $\mathcal{T}^r_s$. Als $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ een basis is van V en $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ de duale basis, dan zijn de *componenten* van T t.o.v. de gegeven bases

$$T(e^{i_1}, \ldots, e^{i_r}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_s}) = T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}. \tag{6.1}$$

Een tensor van rang $(r,0)$ heet *contravariant* van rang r, een tensor van rang $(0,s)$ heet *covariant* van rang s. Een covariante tensor van rang 1 is een lineaire afbeelding $V \to K$ en is dus een element van V^*. We noemen zo'n tensor ook wel een *covector*. Een contravariante tensor van rang 1 is een element van V^{**}, maar omdat V en V^{**} op natuurlijke wijze isomorf zijn, kunnen we zo'n tensor opvatten als een gewone vector in V. Tensoren van rang $(0,0)$ heten *scalairen*.

Laat S een tensor van rang (r,s) zijn en T een tensor van rang (t,u). Dan is het *tensorproduct* $S \otimes T$ een tensor van rang $(r+t, s+u)$, zodanig dat

$$(S \otimes T)(v^1, \ldots, v^r, w^1, \ldots, w^t, x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_u) = S(v^1, \ldots, v^r, x_1, \ldots, x_s)T(w^1, \ldots, w^t, y_1, \ldots, y_u)$$

waarbij $x_i, y_i \in V$, $v^j, w^j \in V^*$. Zo is $T = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j$ de rang-$(1,1)$-tensor zodanig dat $T(\mathbf{e}^k, \mathbf{e}_\ell) = \delta_i^k \delta_\ell^j$. De vectorruimte $\mathcal{T}_s^r(V)$ wordt opgespannen door tensoren van de vorm $\mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes \mathbf{e}^{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}^{j_s}$. De vectorruimte $\mathcal{T}_s^r$ heet het *tensorproduct* van r keer V en s keer V^*. We noteren $\mathcal{T}_s^r$ ook als $V \otimes \ldots \otimes V \otimes V^* \otimes \ldots \otimes V^*$ (r keer V en s keer V^*).

Voorbeeld: De tensor $T = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1 + \ldots \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}^n$ heeft componenten $T_i^j = \delta_i^j$. Het Kroneckersymbool is dus een tensor van rang (1,1).

Voorbeeld: Zij A een $n \times n$-matrix met reële of complexe coëfficiënten. Als een basis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ van V gegeven is, kunnen we A opvatten als een lineaire afbeelding van V naar V: $A(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^n A_{ij} \mathbf{e}_i$. We kunnen A ook opvatten als een tensor van rang $(1,1)$: laat voor $\mathbf{v} \in V$ en $\mathbf{w} \in V^*$

$$A(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \mathbf{w}(A(\mathbf{v})).$$

Dit geeft een bilineaire afbeelding van $V^* \times V$ naar K. Dan is verder

$$A_j^i = A(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}^i(A(\mathbf{e}_j)) = \mathbf{e}^i \left(\sum_{k=1}^n A_{kj} \mathbf{e}_k \right) = A_{ij}.$$

De componenten van de matrix A worden zo de componenten van de tensor A (t.o.v. de basis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$).

Het tensorproduct van twee vectorruimten. We kunnen het tensorproduct definiëren van twee willekeurige vectorruimten (met hetzelfde lichaam van scalairen). We beperken ons weer tot het eindig-dimensionale geval. Laten V en W eindig-dimensionale vectorruimten zijn over K met duale vectorruimten V^*, resp. W^*. Het tensorproduct $V \otimes W$ is de vectorruimte van bilineaire afbeeldingen $T : V^* \times W^* \to K$. Laat $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ en $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ bases van V resp. W zijn. De duale basisvectoren geven we weer aan d.m.v. $\mathbf{e}^i, \mathbf{f}^j$. Een basis van $V \otimes W$ wordt gevormd door de *mn tensorproducten* $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j$ waarvoor geldt dat $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j(\mathbf{e}^k, \mathbf{f}^\ell) = \delta_i^k \delta_j^\ell$. Als $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{w} \in W$, en $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m v^i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{w} = \sum_{j=1}^n w^j \mathbf{f}_j$, dan is

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n v^i w^j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j.$$

Voor de tensorproducten geldt dus

$$(\mathbf{v} + \mathbf{v}') \otimes \mathbf{w} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{v}' \otimes \mathbf{w}, \quad \mathbf{v} \otimes (\mathbf{w} + \mathbf{w}') = \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}' \qquad (\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V,\ \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W),$$

en

$$\lambda(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = (\lambda \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} = \mathbf{v} \otimes (\lambda \mathbf{w}) \qquad (\lambda \in K,\ \mathbf{v} \in V,\ \mathbf{w} \in W).$$

Merk op dat $V \otimes W$ wordt voortgebracht door alle tensorproducten $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ (met $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{w} \in W$) maar niet alle elementen van $V \otimes W$ zijn van de vorm $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$.

Herhaald nemen van tensorproducten is associatief: voor vectorruimten V, W, X (over K) geldt dat $V \otimes (W \otimes X) = (V \otimes W) \otimes X$, dus we kunnen de haakjes weglaten en schrijven $V \otimes W \otimes X$. $V \otimes W \otimes X$ is de vectorruimte van trilineaire afbeeldingen van $V^* \times W^* \times X^*$ naar K.

We bestuderen nu het gedrag van de componenten van een tensor onder een basistransformatie. We nemen we een tensor T van rang $(2,1)$, dus T is een lineaire afbeelding van $V^* \times V^* \times V$ naar K. Laat $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ resp. $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ bases van V zijn; de duale bases zijn $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ resp. $\{\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^n\}$.

Dan is er een basistransformatiematrix A zodanig dat $\mathbf{f}_j = \sum_{i=1}^n A_{ij}\mathbf{e}_i$. A is inverteerbaar, en de transformatie matrix voor de duale bases is dan $(A^{-1})^T$, d.w.z. $\mathbf{f}^j = \sum_{i=1}^n (A^{-1})_{ji}\mathbf{e}^i$. Laat verder $T_k^{ij} = T(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_k)$ en $T_r'^{pq} = T(\mathbf{f}^p, \mathbf{f}^q, \mathbf{f}_r)$ zijn. Dan geldt

$$T_r'^{pq} = T(\mathbf{f}^p, \mathbf{f}^q, \mathbf{f}_r) = \sum_{i,j,k=1}^n (A^{-1})_{pi}(A^{-1})_{qj}A_{kr}T(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_k) = \sum_{i,j,k=1}^n (A^{-1})_{pi}(A^{-1})_{qj}A_{kr}T_k^{ij}. \quad (6.2)$$

We kunnen de componenten van de transformatiematrices ook schrijven in termen van de coördinaten van een willekeurige vector in V t.o.v. de verschillende bases. Laat $\mathbf{x} \in V$ en

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x^i \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^n x'^j \mathbf{f}_j = \sum_{i,j=1}^n x'^j A_{ij}\mathbf{e}_i,$$

dus $x^i = \sum_{j=1}^n A_{ij}x'^j$ en net zo is $x'^\ell = \sum_{k=1}^n (A^{-1})_{\ell k}x^k$ en

$$A_{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}, \quad (A^{-1})_{\ell k} = \frac{\partial x'^\ell}{\partial x^k}.$$

(6.2) kunnen we dan schrijven in de vorm

$$T_r'^{pq} = \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial x'^p}{\partial x^i}\frac{\partial x'^q}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial x'^r}T_k^{ij}. \quad (6.2')$$

Let op de positie van de indices. In uitdrukkingen waarbij wordt gesommeerd over een of meer indices waarbij in de te sommeren termen elke index waarover wordt gesommeerd eenmaal boven en eenmaal beneden voorkomt, laat men dikwijls het somteken weg. Dit staat bekend als de Einstein-sommatieconventie. In het vervolg zullen we deze conventie ook hier aanhouden. Voor een tensor van rang (r, s) luidt de transformatieregel analoog aan (6.2')

$$T'^{k_1\ldots k_r}_{\ell_1\ldots\ell_s} = \frac{\partial x'^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x'^{k_r}}{\partial x^{i_r}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{\ell_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x^{j_s}}{\partial x'^{\ell_s}}T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}. \quad (6.3)$$

In de fysische literatuur wordt een tensor vaak gegeven door zijn componenten t.o.v. een basis te specificeren. (6.3) levert dan de componenten t.o.v. een willekeurige basis. Omgekeerd, als de componenten van een zekere grootheid t.o.v. een willekeurige basis gegeven zijn, en de componenten t.o.v. verschillende bases zijn gerelateerd d.m.v. (6.3) dan is de grootheid een tensor. Voorbeelden zullen we later tegenkomen.

Door het nemen van tensorproducten van twee tensoren kunnen we tensoren maken van hogere rang. Er bestaat ook een methode om tensoren van lagere rang te maken: laat T een tensor van rang (r, s) zijn. Neem een vaste basis in V. Beschouw de componenten $T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$ van T t.o.v. deze basis (en de duale basis in V^*). Kies nu, voor zekere ℓ, m de ℓ-e component boven en de m-e component onder, laat de componenten gelijk zijn aan k en sommeer over k van 1 tot en met n. Dit proces heet *contractie* van de tensor T en levert een tensor T' op van rang $(r-1, s-1)$. Er geldt dus

$$(T')^{i_1\ldots i_{\ell-1}i_{\ell+1}\ldots i_r}_{j_1\ldots j_{m-1}j_{m+1}\ldots j_s} = T^{i_1\ldots i_{\ell-1}ki_{\ell+1}\ldots i_r}_{j_1\ldots j_{m-1}kj_{m+1}\ldots j_s}. \quad (6.4)$$

Het is niet moeilijk om aan te tonen dat het rechterlid van (6.4) transformeert als een tensor van rang $(r-1, s-1)$, m.a.w. T' is inderdaad een tensor. Het simpelste voorbeeld krijgen we als $r = s = 1$. De tensor T van rang $(1,1)$ kunnen we als een matrix opvatten. Contractie levert een tensor van rang (0,0), dus een scalar T^i_i. Deze scalar heet het spoor $\mathrm{tr}(T)$ van T. Contractie van een tensor is dus op te vatten als een generalisatie van het spoor nemen. Een ander voorbeeld is het inwendig product: laat $\mathbf{a}$ resp $\mathbf{b}$ een vector, resp. een covector zijn. Het tensorproduct $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ geeft een tensor van rang $(1,1)$ met componenten $a^i b_j$. Contractie geeft de scalar $a^i b_i$, het inwendig product van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$.

Tensordichtheden; het Levi-Civitàsymbool. Sommige objecten gedragen zich als een tensor alleen onder speciale coördinatentransformaties. Beschouw het *Levi-Civitasymbool* ϵ_{ijk} dat is gedefinieerd als volgt: $\epsilon_{123} = 1$ en verder is ϵ_{ijk} totaal antisymmetrisch, d.w.z. het teken klapt om als we twee indices verwisselen. Dus is $\epsilon_{ijk} = 1$, resp. -1 als i, j, k een even, resp. oneven permutatie is van $1, 2, 3$ en $\epsilon_{ijk} = 0$ als niet alle indices ongelijk zijn. Laat nu $x^i \to x'^i = A^i_j x^j$ een coördinatentransformatie zijn. Dan is

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial x'^\ell} \frac{\partial x^j}{\partial x'^m} \frac{\partial x^k}{\partial x'^n} = \epsilon_{\ell mn} \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) \tag{6.5}$$

Onder de coördinatentransformatie gedraagt ϵ_{ijk} zich als een tensor, op een extra factor na, die gelijk is aan de Jacobiaan van de transformatie. ϵ (met componenten ϵ_{ijk}) noemen we hierdoor een *tensordichtheid*. Tensordichtheden worden onderscheiden naar de exponent van de Jacobiaan die in de transformatieformule optreedt. Als er in het rechterlid $\det\left(\frac{\partial x''}{\partial x'}\right)^w$ staat dan is het gewicht w. Het gewicht van ϵ_{ijk} is dus -1.

§6.3. Symmetrische en antisymmetrische tensoren. Het uitwendig product.

We beperken ons hier tot contravariante tensoren, hoewel soortgelijke constructies ook voor covariante tensoren opgaan.

Definitie: Een contravariante tensor $T \in \mathcal{T}_0^r(V)$ (van rang r) heet *symmetrisch* als voor $v_1, \ldots, v_r \in V^*$

$$T(v_1, \ldots, v_r) = T(v_{i_1}, \ldots, v_{i_r})$$

waarbij $i_1, \ldots, i_r$ een permutatie is van $1, \ldots, r$.

Een contravariante tensor $T \in \mathcal{T}_0^r(V)$ heet *antisymmetrisch* (of *alternerend)* als voor $v_1, \ldots, v_r \in V^*$

$$T(v_1, \ldots, v_r) = \pm T(v_{i_1}, \ldots, v_{i_r})$$

waarbij $i_1, \ldots, i_r$ een permutatie is van $1, \ldots, r$, en waarbij het teken $\pm$ plus is als de permutatie even is en min als de permutatie oneven. We kunnen dit schrijven als

$$T(v_1, \ldots, v_r) = \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_r} T(v_{i_1}, \ldots, v_{i_r})$$

met het *Levi-Cività-symbool* $\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_r} = 1, -1, 0$ als $i_1, i_2 \ldots, i_r$ een even permuatie is van $1, 2, \ldots, r$ resp. een oneven permutatie, resp. geen permutatie is (doordat niet alle $i_1, \ldots, i_r$ verschillend zijn).

Definitie: De antisymmetrisator $\mathbf{A} : \mathcal{T}_0^r \to \mathcal{T}_0^r$ maakt van een tensor T van rang r een antisymmetrische tensor:

$$\mathbf{A}(T)(v_1, \ldots, v_r) = \frac{1}{r!} \sum_P \epsilon_{P(1) \ldots P(r)} T(v_{P(1)}, \ldots, v_{P(r)})$$

waarbij wordt gesommeerd over alle permutaties P van $1, \ldots, r$.

De antisymmetrische contravariante tensoren van rang r vormen een lineaire deelruimte van $\mathcal{T}_0^r(V)$. We geven deze aan d.m.v. $\bigwedge^r(V)$. Merk op dat $\bigwedge^1(V) = V$, en $\dim \bigwedge^r(V) = \binom{n}{r}$ met $n = \dim(V)$. Voor $r > n$ is $\bigwedge^r(V) = \{0\}$. Op de directe som $\bigwedge(V) = \oplus_{r=0}^n \bigwedge^r(V)$ is een product gedefinieerd, het *uitwendig product*, als volgt: laat $S \in \bigwedge^r(V)$ en $T \in \bigwedge^s(V)$. Dan is $S \wedge T$ een antisymmetrische tensor van rang $r + s$ gedefinieerd als

$$S \wedge T = \frac{(r+s)!}{r!s!} \mathbf{A}(S \otimes T).$$

Zo wordt de vectorruimte $\bigwedge(V)$ tot een algebra, de *uitwendige* of *Grassman-algebra.* Voor $v, w \in V$ is

$$v \wedge w = v \otimes w - w \otimes v.$$

Propositie 6.1: Het stelsel vectoren $\{v_1, \ldots, v_r\}$ is lineair afhankelijk dan en slechts dan als $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r = 0$.

Bewijs: Als het stelsel lineair afhankelijk is, dan is (zeg) $v_r = a_1 v_1 + \ldots + a_{r-1} v_{r-1}$ voor constanten $a_1, \ldots, a_{r-1} \in K$. Dan is, wegens lineariteit en antisymmetrie,

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_r = a_1 v_1 \wedge \ldots \wedge v_1 + \ldots a_{r-1} v_1 \wedge \ldots \wedge v_{r-1} \wedge v_{r-1} = 0.$$

Als het stelsel lineair onafhankelijk is, dan vul het aan tot een basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ van V. Laat $\{v^1, \ldots, v^n\}$ de duale basis van V^* zijn. Nu is

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_r(v^1, \ldots, v^r) = v_1(v^1) \ldots v_r(v^r) = 1.$$

I.h.b. is dus $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r \neq 0$. $\diamond$

M.b.v. het uitwendig product kunnen we de determinant van en matrix op coördinaat-onafhankelijke wijze definiëren: laat A een reële of complexe $n \times n$-matrix zijn. Als een basis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ van V gegeven is, definieert A op V een lineaire afbeelding: $A\mathbf{e}_j = A^i_j \mathbf{e}_i$. Nu geldt voor n vectoren $v_1, \ldots, v_n \in V$

$$Av_1 \wedge \ldots \wedge Av_n = (\det A) v_1 \wedge \ldots \wedge v_n.$$

Het teken van de determinant kan worden gebruikt om een *oriëntatie* aan bases van de vectorruimte V te geven. Als $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ en $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ bases van V zijn, dan is er een matrix A zodanig dat $A\mathbf{e}_j = \mathbf{f}_j$ voor $j = 1, \ldots, n$. Als $\det(A) > 0$ dan zeggen we dat de beide basis dezelfde oriëntatie hebben, als $\det(A) < 0$, dan hebben de bases tegengestelde oriëntatie. In het geval van $\mathbf{R}^n$ is de standaardbasis per definitie positief georiënteerd (we zeggen ook: *rechtshandig*. Een basis met tegengestelde (negatieve) oriëntatie heet *linkshandig*.

Opmerking: Zoals al gezegd, kunnen we een soortgelijke constructie uitvoeren voor covariante tensoren. Een antisymmetrische covariante tensor van rang p, dus een element van $\bigwedge^p(V^*)$, wordt ook een *p-vorm* genoemd.

§6.4. Cartesische tensoren.

In sommige gevallen zijn we alleen geïnteresseerd in orthogonale coördinatentransformaties, die orthonormale bases in orthonormale bases overvoeren.

Definitie: $X = (X^{j_1 j_2 \ldots j_k}_{i_1 i_2 \ldots i_\ell})$ heet een *Cartesische tensor* als de componenten $X^{j_1 j_2 \ldots j_k}_{i_1 i_2 \ldots i_\ell}$ transformeren als de componenten van een tensor onder orthogonale transformaties (dus rotaties) $x'^i = A^i_j x^j$ (waarbij A een orthogonale matrix is met componenten A^i_j:

$$(X^{j_1 j_2 \ldots j_k}_{i_1 i_2 \ldots i_\ell})' = \prod_{a=1}^{k} \frac{\partial x'^{j_a}}{\partial x^{q_a}} \prod_{b=1}^{\ell} \frac{\partial x^{p_b}}{\partial x'^{i_b}} (X^{q_1 q_2 \ldots q_k}_{p_1 p_2 \ldots p_\ell}).$$

Nu is (omdat A orthogonaal is) $\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}$ zodat er geen verschil is tussen contra- en covariant gedrag en een Cartesische tensor X van rang k transformeert dus onder de coördinatentransformatie $x^i \to x'^i = A^i_j x^j$ als $(X')_{i_1 \ldots i_k} = \left(\prod_{a=1}^k A_{i_a j_a}\right) X_{j_1 \ldots j_k}$ met $A = (A_{ij})$ een orthogonale matrix. Indien de componenten van de tensor een extra minteken krijgen onder orthogonale transformaties met $\det(A) = -1$ (dus oriëntatie-omkerende transformaties) dan spreken we van een *pseudotensor* (resp. *pseudoscalar*, *pseudovector* als de rang 0, resp. 1 is). Pseudotensoren zijn dus in feite tensordichtheden van oneven gewicht. Een voorbeeld is de *Levi-Civita-pseudotensor* ϵ_{ijk} (vergelijk (6.5)), een ander voorbeeld is het uitwendig product van twee vectoren in $\mathbf{R}^3$: bij inversie $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$ gaan de componenten v_i van een vector $\mathbf{v}$ over in $-v_i$; de componenten $z_k = \epsilon_{ijk} v_i w_j$ van het uitwendig product $\mathbf{z} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ van twee vectoren over in $+z_k$; $\mathbf{z}$ is dus een pseudovector. Merk op dat z_k de contractie is van het product van twee vectoren en een pseudotensor. In het algemeen is het tensorproduct van twee pseudotensoren weer een gewone tensor en het product van een tensor met een pseudotensor levert een pseudotensor op.

Isotrope Cartesische tensoren. Beschouw nu de volgende situatie: neem aan dat a_i en X_{ij} (componenten van) Cartesische tensoren zijn en dat er een lineair verband is tussen beide: $a_i = C_{ijk}X_{jk}$ (we houden ook hier de sommatieconventie aan). Door te bekijken hoe deze uitdrukking transformeert onder de transformatie $x^i \to x'^i$, zien we dat uit $a'_p = C'_{pqr}X'_{qr}$ volgt dat

$$C'_{pqr} = \frac{\partial x'^p}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x'^q}\frac{\partial x^k}{\partial x'^r}C_{ijk}$$

m.a.w. C_{ijk} is een tensor van rang 3. (Dit is een voorbeeld van wat wel de *quotiëntregel* voor tensoren wordt genoemd.) Als de vorm van het lineaire verband niet afhangt van de keuze van de orthonormale basis van de vectorruimte, dan geldt voor de componenten van C (bij een orthogonale transformatie $x_i \to x'_i$) $C_{ijk} = C'_{ijk}$. Een dergelijke (pseudo)tensor, waarvan de componenten onveranderd blijven onder een directe orthogonale transformatie, heet *isotroop.*

Het is mogelijk om alle isotrope Cartesische tensoren van gegeven rang k te bepalen. Zoals we weten is een Cartesische (pseudo)tensor van rang k een mulilineaire afbeelding $C : (\mathbf{R}^n)^{\times k} \to \mathbf{R}$ is, zodanig dat voor de componenten geldt dat $C_{i_1,\ldots,i_n} = C(e_{i_1},\ldots,e_{i_n})$ met $\{e_1,\ldots,e_n\}$ een orthonormale basis van $\mathbf{R}^n$. Een Cartesische (pseudo)tensor C is nu isotroop als $C(e_1,\ldots,e_n) = C(Oe_1,\ldots,Oe_n)$ waarbij O een directe orthogonale transformatie is. Het geval dat $n = 1$ is triviaal, we nemen aan dat $n > 1$.

1. **Rang 1.** $C_i = C(e_i)$. Aangezien er voor elke $i, j = 1,\ldots,n$ een orthogonale transformatie bestaat zodat $Oe_i = e_j$, is $C_i = C_j$. Verder is $C_i = C(e_i \cos\theta + e_j \sin\theta) = C_i \cos\theta + C_i \sin\theta$ voor $\theta \in \mathbf{R}$. Maar dit is alleen mogelijk als $C_i = 0$, m.a.w. de enige isotrope Cartesische tensor van rang 1 is de nultensor.
2. **Rang 2.** $C_{ij} = C(e_i, e_j)$. Als $n = 2$, dan geldt $C_{11} = C_{22}$ en $C_{12} = -C_{21}$. Verder zijn er geen beperkingen. Dus isotrope Cartesische tensoren van rang 2 in $n = 2$ zijn van de vorm $A(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) + B(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1)$ ofwel $A\delta_{ij} + B\epsilon_{ij}$ met ϵ_{ij} weer het totaal antisymmetrische Levi-Civitasymbool. Merk op dat als we ook orthogonale transformaties met determinant -1 beschouwen, dan is $B = 0$ (immers dan is $C_{12} = C(e_1, e_2) = C(-e_1, e_2) = -C_{12}$) dus in dat geval is de enige tensor van rang 2 gelijk aan $A\delta_{ij}$. Ga na dat ϵ_{ij} wel een pseudotensor is. Voor $n > 2$ is er voor $i \neq j$ ook een directe orthogonale transformatie $e_i \to -e_i$, $e_j \to e_j$ en dan is dus $C_{ij} = 0$. Verder geldt weer dat er een transformatie is zodanig dat $e_i \to e_j$ zodat $C_{ii} = C(e_i, e_i) = C(e_j, e_j) = C_{jj}$. De enige isotrope Cartesische tensor van rang 2 voor $n > 2$ is dus $A\delta_{ij}$.
3. **Rang 3.** Voor $n = 3$ is er de pseudotensor ϵ_{ijk}. Verder zijn er geen (pseudo)tensoren van rang 3.
4. **Rang $\geq$ 4.** De Cartesische isotrope tensoren $C_{i_1\ldots i_N}$ van even rang N op $\mathbf{R}^n$ zijn lineaire combinaties van de vorm $\delta_{i_1 i_2}\ldots\delta_{i_{N-1}i_N}$ (Zo heeft een Cartesiche tensor van rang 4 de vorm $A\delta_{ij}\delta_{k\ell} + B\delta_{ik}\delta_{j\ell} + C\delta_{i\ell}\delta_{jk}$.) De enige Cartesische pseudotensor van rang N is de volledig antisymmetrische pseudotensor $\epsilon_{i_1\ldots i_N}$ op $\mathbf{R}^N$. Andere Cartesische (pseudo)tensoren zijn er niet.

Toepassingen: Beschouw de n-dimensionale Euclidische ruimte E_n. Door een vast punt O (de *oorsprong*) te kiezen en een orthonormale basis $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ krijgt E_n de structuur van een vectorruimte $\mathbf{R}^n$. Coördinaten $x^1,\ldots,x^n$ van een punt $\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n$ ten opzichte van zo'n orthonormale basis heten *Cartesische coördinaten.* Als $\{x'^1,\ldots,x'^n\}$ een ander stelsel van Cartesische coördinaten is, dan geldt $x'^i = A^i_j x^j + b^i$ waarbij $A = (A^i_j)$ een orthogonale matrix is en b^i de componenten van een vector $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$. A en $\mathbf{b}$ hangen niet af van $\mathbf{x}$. Een *tensorveld* X van rang (r, s) op een open deel $U \subset E_n$ is een continue afbeelding $X : U \to \mathcal{T}^r_s$. Als $r = s = 0$ spreken we van een scalair veld, als $r = 1, s = 0$ van een vectorveld. X heet een Cartesisch tensorveld als $X(\mathbf{x})$ een Cartesische tensor is voor alle $\mathbf{x} \in U$. Een voorbeeld is het volgende: als $\mathbf{v}$ een vectorveld is op U en x^i zijn Cartesische coördinaten, dan is de gradiënt $\nabla\mathbf{v}$ met componenten $(\nabla\mathbf{v})^i_j = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} =: v^i{}_{,j}$ een Cartesisch tensorveld van rang 2.

1. Zij u^i een vectorveld op $\Omega \in E_n$, $n \geq 2$. f is een scalair veld dat lineair en isotroop van de eerste partiële afgeleiden $u^i{}_{,j} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j}$ afhangt. Dan is $f(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x})\mathrm{div}(u)$ waarbij de divergentie $\mathrm{din}(u)$ gedefinieerd is als $u^i{}_{,i}$. Immers is $f(\mathbf{x}) = C_{ij}(\mathbf{x})u^i{}_{,j}$ en wegens isotropie is $C_{ij} = C\delta_{ij}$.
2. Zij u^i een vectorveld op $\Omega \in E_3$. $X = (X^j)$ is een vectorveld dat lineair en isotroop van de partiële afgeleiden $u^i{}_{,j}$ afhangt. Dan is $X(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x})\mathrm{curl}(u)$. Immers is $X^k(\mathbf{x}) = C_{ijk}(\mathbf{x})u^i{}_{,j}$. Wegens isotropie is $C_{ijk} = C\epsilon_{ijk}$ en dus is $X^k = C\epsilon_{ijk}u^i{}_{,j} = C(\mathrm{curl}(u))^k$.

§6.5. Toepassing: Isotrope elastische lichamen.

De strain- en de deformatietensor. Laat in E_3 een massief lichaam M gegeven zijn. Onder invloed van een krachtveld worden de posities van de punten van M veranderd, zo dat een punt met aanvankelijke positie $\mathbf{x}$ de positie $\mathbf{x}+\mathbf{u}(\mathbf{x})$ aanneemt. Dit levert een omkeerbare transformatie $\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$ op. We nemen aan dat zowel $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ als de partiële afgeleiden $\frac{\partial u^i}{\partial x^j}$ overal klein zijn. Hierbij zijn x^j en u^i Cartesische coördinaten van $\mathbf{x}$ resp. $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. De rang-2-tensor $\nabla\mathbf{u}$ met componenten $u^i{}_{,j} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j}$ heet de *deformatietensor*. We kunnen $\nabla\mathbf{u}$ splitsen in een symmetrisch en een antisymmetrisch deel: $\nabla\mathbf{u} = (\nabla\mathbf{u})^S + (\nabla\mathbf{u})^A$. We tonen aan dat alleen het symmetrische deel te maken heeft met werkelijke vervorming. Merk eerst op dat onder een uniforme translatie $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ constant is en de deformatietensor dus nul. Beschouw nu een uniforme infinitesimale rotatie om een as die we zonder beperking der algemeenheid door de oorsprong in E_3 kunnen kiezen: de componenten van ∇u veranderen niet als we de Cartesische coördinaten transleren: $x^i \to x^i + a^i$. Onder een infinitesimale rotatie gaat $\mathbf{x}$ over in $\mathbf{x} + \delta\phi\mathbf{n} \times \mathbf{x}$ (waarbij $\mathbf{n}$ een eenheidsvector langs de rotatie-as is). Dus $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \delta\phi\mathbf{n} \times \mathbf{x}$. Voor de componenten geldt dus $u^i = \epsilon_{ijk}(\delta\phi)n^j x^k$ en $u^i{}_{,k} = \epsilon_{ijk}\delta\phi n^j = -u^k{}_{,i}$. De deformatietensor is dus antisymmetrisch en evenredig met de grootte van de infinitesimale rotatiehoek. Omgekeerd, als $\nabla\mathbf{u}$ antisymmetrisch is, dan is $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ met A een antisymmetrische matrix en $\mathbf{b}$ een vector. $\mathbf{b}$ is irrelevant en we kunnen deze nul maken door de oorsprong te verschuiven. Voor een antisymmetrische matrix A is er een unieke vector $\mathbf{n}$ zodanig dat $A\mathbf{x} = \mathbf{n} \times \mathbf{x}$. Dus $(\nabla\mathbf{u})^A$ correspondeert met een infinitesimale rotatie.

We bekijken nu het gedeelte van de tensor dat een werkelijke deformatie voorstelt. Beschouw daartoe een infinitesimaal lengte-element $\delta\mathbf{x}$ tussen twee punten $\mathbf{x}$ en $\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}$ in M. Voor de lengte geldt $\delta\mathbf{x}^2 = (\delta x^i)^2$ (met sommatie over i). Onder de verplaatsing $\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$ gaat $\delta\mathbf{x}$ over in $\delta\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})$ met lengte $(\delta x^i + u^i{}_{,j}\, \delta x^j)^2 = (\delta\mathbf{x})^2 + 2e_{ij}\delta x^i \delta x^j$ waarbij de *strain tensor* $e_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u^i}{\partial x^j} + \dfrac{\partial u^j}{\partial x^i} + \dfrac{\partial u^k}{\partial x^i}\dfrac{\partial u^k}{\partial x^j}\right)$ de lokale lengte-verandering van een lijnelement weergeeft. Als de partiële afgeleiden klein zijn, kunnen we het kwadratische gedeelte van e_{ij} verwaarlozen t.o.v. het lineaire gedeelte en in deze lineaire benadering is e_{ij} dan gelijk aan het symmetrische deel $\frac{1}{2}(u^i{}_{,j} + u^j{}_{,i})$ van de deformatietensor.

De stresstensor. Deformaties in een elastisch lichaam worden veroorzaakt door een krachtveld. Om een verband te vinden tussen zo'n krachtveld en de daardoor veroorzaakte deformatie, proberen we dit krachtveld ook als een tensorveld te beschrijven. Beschouw een klein gedeelte van het lichaam M, dat wordt gevormd door een gebied V ingesloten door een bijna overal glad oppervlak $A = \partial V$. Op V werken twee soorten krachten: inwendige krachten of volumekrachten, zoals de zwaartekracht, en verder oppervlaktekrachten. Deze laatste werken alleen op de rand omdat krachten op inwendige oppervlakken elkaar wederzijds opheffen vanwege de derde wet van Newton. De totale kracht op V is dan $\displaystyle\int_V \mathbf{f}d\tau + \oint_A F dA$. Hierbij zijn $\mathbf{f}$ en F de volume- resp. oppervlaktekrachtdichtheden (d.w.z. kracht per volume, resp. per oppervlakte). Beide zijn vectoriële grootheden. Zo is in het geval van de zwaartekracht $\mathbf{f} = \rho g$ met ρ de lokale dichtheid. $\mathbf{f}$ is in principe in elk punt van V gedefinieerd en vormt een vectorveld. Dit is echter niet het geval voor F. F is alleen op het oppervlak gedefinieerd en hangt sterk af van de oriëntatie van het oppervlak - bij een kleine verandering van (de rand van) V verandert F sterk mee. We willen proberen om F te vervangen door een tensorveld dat een waarde heeft die onafhankelijk is van de keuze van V. F moet dan een functie zijn van het veld. Behalve van het veld hangt F ook af van de oriëntatie van het oppervlak, of anders gezegd, We van de uitwendige normaalvector $\mathbf{n}$ op het oppervlak. Door voor V een volume-element te kiezen in de vorm van een rechthoekig blok met een infinitesimaal smalle doorsnede in één richting (zeg langs $\mathbf{n}$) zien we dat $F^i(\mathbf{n}) = -F^i(-\mathbf{n})$. Kies nu voor V een infinitesimaal klein viervlak met drie zijden in de coördinaatvlakken en uitwendige normalen (zeg) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. De vierde zijde heeft uitwendige normaal $\mathbf{n}$. De oppervlaktekrachten per eenheid van oppervlak op de drie zijden langs de coördinaatvlakken geven we aan met $\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}$. Hierbij staat de eerste index i voor de vectorcomponent van de kracht, en de tweede index j voor het coördinaatvlak $x^j = 0$ waarop de kracht werkt. De totale kracht in de x^i-richting is gelijk aan

$$\sigma_{i1}\delta A_1 + \sigma_{i2}\delta A_2 + \sigma_{i3}\delta A_3 + F^i(A)\delta A + f^i \delta V$$

waarbij δA_i de oppervlakte is van de zijde in het coördinaatvlak en δA de oppervlakte van de vierde, "schuine" zijde. δV staat voor het volume en $F(A)\delta A$ is de oppervlaktekracht op de vierde zijde. Als δa de grootte-orde van lengte van de zijden is, dan is zijn de eerste termen van orde $(\delta a)^2$ en de laatste term is van orde $(\delta a)^3$. De totale kracht is gelijk aan massa maal versnelling en bij een eindige versnelling is deze ook van orde $(\delta a)^3$. De som van de termen van tweede orde is dus gelijk aan nul, ook als het volume niet in evenwicht is, d.w.z. aangezien $\delta A^i = -n^i \delta A$,

$$0 = \sigma_{ji}\delta A_i + F^j(A)\delta A = (-\sigma_{ji}n^i + F^j)\delta A,$$

volgt dat $F^j = \sigma_{ji}n^i$. M.b.v. de quotiëntregel voor tensoren volgt nu dat σ_{ij} de componenten zijn van een tensor van rang 2, de *stresstensor*.

We tonen nu aan dat in evenwicht geldt dat de stresstensor symmetrisch is. Neem weer voor V een gebied ingesloten door een gladde rand A. Dan geldt volgens de stelling van Gausz

$$0 = \int_V f^i d\tau + \oint_A \sigma_{ij} n^j dA = \int_V \left(f^i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^j} \right) d\tau,$$

en aangezien V willekeurig is, is $f^i + \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^j} = 0$. Verder geldt dat het totale krachtmoment nul is: $\displaystyle\int_V \mathbf{x} \times \mathbf{f} d\tau + \int_A \mathbf{x} \times F dA = 0$. Voor (bijvoorbeeld) de 3e component betekent dit:

$$0 = \int_V (x^1 f^2 - x^2 f^1) d\tau + \oint_A (x^1 \sigma_{2i} - x^2 \sigma_{1i}) n^i dA = \int_V \left(x^1 f^2 - x^2 f^1 + \frac{\partial}{\partial x^i}(x^1 \sigma_{2i} - x^2 \sigma_{1i}) \right) d\tau.$$

De integrand is opnieuw nul omdat V willekeurig is. Uitwerken geeft

$$0 = x^1 (f^2 + \frac{\partial \sigma_{2i}}{\partial x^i}) - x^2 (f^1 + \frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x^i}) + \sigma_{21} - \sigma_{12} = 0.$$

Aangezien we boven al zagen dat $f^i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^j} = 0$, volgt dat $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, en omdat de andere componenten geheel analoog gaan volgt dat de stresstensor σ (voor een systeem in evenwicht) symmetrisch is.

De wet van Hooke. Als de op het lichaam werkende oppervlaktekrachten klein zijn bestaat er een lineair verband tussen de toegepaste kracht en de grootte van de deformatie, preciezer: tussen de stresstensor en de deformatietensor. M.a.w. er is een tensoriële relatie $\sigma_{ij} = C_{ijk\ell} u^k{}_{,\ell}$. Uit de quotiëntregel volgt dat $C_{ijk\ell}$ opnieuw een (Cartesiche) tensor is, van rang 4. De coëfficiënten $C_{ijk\ell}$ hangen in het geval van een isotroop lichaam niet af van de oriëntatie, d.w.z. bij rotatie van het Cartesich coördinatenstelsel blijven de coëfficiënten gelijk. De tensor $C_{ijk\ell}$ is dus isotroop. Uit §1.4 volgt dat dan $C_{ijk\ell} = A\delta_{ij}\delta_{k\ell} + B\delta_{ik}\delta_{j\ell} + C\delta_{i\ell}\delta_{jk}$ met A, B, C constanten. Als we dit invullen in de wet van Hooke, vinden we

$$\sigma_{ij} = A\delta_{ij}\frac{\partial u^k}{\partial x^k} + B\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + C\frac{\partial u^j}{\partial x^i}. \tag{6.6}$$

Omdat σ symmetrisch is, volgt dat $B = C$, dus

$$\sigma_{ij} = A\delta_{ij} \cdot \operatorname{div}(\mathbf{u}) + B \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i}\right) \tag{6.7}$$

ofwel $\sigma = A \operatorname{div}(\mathbf{u})\mathbf{I} + B(\nabla\mathbf{u})^S$, waarbij $\mathbf{I}$ de eenheidstensor met componenten δ_{ij} voorstelt.

We gaan nu de constanten A en B uitdrukken in termen van de fenomenologische grootheden E (de elasticiteitsmodulus), μ (Poisson's modulus), G (de shear modulus) en K (de bulk modulus) of zijn inverse κ (de compressibiliteit).

Merk eerst op dat, omdat de stresstensor $\sigma(\mathbf{x})$ symmetrisch is, er een orthonormale basis in $\mathbf{x}$ bestaat zodat $\sigma_{ij} = 0$ voor $i \neq j$, m.a.w. de matrix σ_{ij} is een diagonaalmatrix. Neem nu aan dat σ lokaal constant is en dat $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$. Beschouw een kleine kubus met hoekpunt $\mathbf{x}$ en zijvlakken x_i=constant. Op de kubus werkt de oppervlaktekracht in alleen de x_1-richting en alleen op de vlakken x_1 constant. Als gevolg van deze kracht wordt de kubus in de x_1-richting uitgerekt en er geldt $\sigma_{11} = E\frac{\partial u^1}{\partial x^1} = Ee_1$. In de x_2 en x_3-richting ondergaat de kubus een compressie zodanig dat $e_2 = e_3 = -\mu e_1$. Als de de elasticiteitsvergelijking opschrijven, vinden we

$$Ee_1 = \sigma_{11} = A(e_1 + e_2 + e_3) + Be_1 = (A(1 - 2\mu) + B)e_1,$$

$$0 = \sigma_{22} = A(e_1 + e_2 + e_3) + Be_2 = (A(1 - 2\mu) - B\mu)e_1$$

zodat $A = \dfrac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$ en $B = \dfrac{E}{1+\mu}$.

Beschouw nu opnieuw een kleine kubus waarop alleen een shear stress $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ parallel aan het onder- en bovenvlak werkt. Als gevolg hiervan worden het grond- en bovenvlak van de kubus gedeformeerd tot een parallellogram waarbij de zijden hoeken van $90^o \pm \theta$ met elkaar maken. We nemen aan dat θ klein is. Dan is $\theta \approx \frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x^1}$. De shear modulus G is gedefinieerd als $\sigma_{12} = G\theta$ zodat $G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$.

Tenslotte de bulk modulus K: beschouw een elastische kubus waarop in alle richtingen een uniforme druk P werkt. De kubus wordt als gevolg van deze druk samengedrukt en voor $K = -V\frac{\partial P}{\partial V}$ geldt dat $K = \dfrac{E}{3(1-2\mu)}$. De afleiding van dit resultaat vormt de inhoud van een van de opgaven.

De bewegingsvergelijking voor een isotroop elastisch medium.

Zoals we hebben gezien is de i-e component van de totale krachtdichtheid in een punt van het elastisch lichaam gelijk aan $f^i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^j}$. Met de tweede wet van Newton volgt dan

$$\rho\frac{d^2u^i}{dt^2} = f^i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^j}. \tag{6.8}$$

Omdat we nu niet kunnen aannemen dat het systeem in evenwicht is, hoeft σ niet symmetrisch te zijn. Wel geldt nog steeds (6.6). Als we dit invullen, dan krijgen we een bewegingsvergelijking in termen van alleen $\mathbf{u}$ en $\mathbf{f}$. Een nog kortere manier om de vorm van de bewegingsvergelijking te vinden, is door op te merken dat de tweede term in het rechterlid van (6.8) een isotrope lineaire combinatie is van de tweede partiële afgeleiden van $\mathbf{u}$. De enige mogelijkheid hiervoor is een lineaire combinatie van de Laplaciaan $\Delta\mathbf{u}$ en $\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})$. De bewegingsvergelijking (6.8) wordt dan in vectorvorm

$$\rho\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \mathbf{f} + \lambda\Delta\mathbf{u} + \nu\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) \tag{6.9}$$

voor zekere constanten λ en ν ((6.8) uitwerken m.b.v. (6.6) leert dat $\lambda = \dfrac{E}{2(1+2\mu)}$ en $\nu = \dfrac{\lambda}{1-2\mu}$)). We tonen aan dat (6.9) in feite een golfvergelijking is. Neem aan dat $\mathbf{f} = 0$ en dat $\mathbf{u}$ alleen van x^1 afhangt. Als we (6.9) in componenten uitschrijven, dan vinden we

$$\rho\frac{d^2u^1}{dt^2} = (\lambda+\nu)\frac{d^2u^1}{\partial x_1^2}, \quad \rho\frac{d^2u^j}{dt^2} = \nu\frac{d^2u^j}{\partial x_1^2}\ (j=2,3). \tag{6.10}$$

De eerste vergelijking van (6.10) is de golfvergelijking voor een transversale golf, de tweede is de golfvergelijking voor een longitudinale golf. De golfsnelheden zijn voor beide typen golven verschillend en hangen af van E en μ. Aangezien $\lambda,\nu > 0$, is de golfsnelheid van een longitudinale golf grotere dan die van een transversale golf. In het algemeen is een golfoplossing de som van een longitudinale en een transversale golf: voor een longitudinale golf geldt dat $\nabla\times\mathbf{u} = 0$, voor een transversale golf dat $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$. M.b.v. $\Delta\mathbf{u} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})$ kunnen we (6.9) voor $\mathbf{f} = 0$ schrijven als

$$\rho\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = -\lambda\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}) + (\lambda+\nu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}).$$

Hieruit volgt de bewering meteen.

§6.6. The Hodge-steroperator.

Laat V een n-dimensionale vectorruimte zijn. De vectorruimten $\bigwedge^p(V)$ en $\bigwedge^{n-p}(V)$ hebben dezelfde dimensie en zijn dus isomorf. Als V voorzien is van een inwendig product, dus een hermitese positief-definiete vorm, dan is er een natuurlijk isomorfisme tussen beide vectorruimten.

Definitie: Voor een georiënteerde orthonormale basis $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ van V is de *Hodge-steroperator* $*: \bigwedge^p(V) \to \bigwedge^{n-p}(V)$ een lineaire afbeelding die gedefinieerd is door

$$*(\mathbf{e}_{i_1}\wedge\dots\wedge\dots\mathbf{e}_{i_p}) = \frac{1}{(n-p)!}\epsilon_{i_1\dots i_p i_{p+1}\dots i_n}\mathbf{e}_{i_{p+1}}\wedge\dots\wedge\mathbf{e}_{i_n}.$$

Voorbeeld: Laat $V = \mathbf{R}^3$ met standaardbasis $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$. Dan geldt $*(\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3) = 1$ en

$$*\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3,\ *\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1\ ,*\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2,\ *(\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1,\ *(\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2,\ *(\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3.$$

Propositie 6.2: Voor $** : \bigwedge^p(V) \to \bigwedge^p(V)$ geldt dat $** = (-1)^{p(n-p)}$.

Opmerking: De definitie van de Hodge-steroperator is onafhankelijk van de gekozen orthonormale basis van V, mits beide bases dezelfde oriëntatie hebben.