IV. Sturm-Liouvilletheorie.

§4.1. Niet-begrensde operatoren.

Beschouw op de Hilbertruimte $\mathcal{L}_2(a,b)$ de differentiaaloperator $T = \frac{d}{dx}$. T is niet op geheel H gedefinieerd, dus het domein $D(T)$ is een echte lineaire deelruimte van H. Anderzijds geldt dat de lineaire deelruimte F die wordt opgespannen door de functies $\epsilon_n(x) = \exp(2n\pi ix/L)$ $(n \in \mathbf{Z})$, waarbij $L = b - a$, als afsluiting geheel H heeft (m.a.w. het stelsel functies $\{\epsilon_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ is een volledig orthogonaal stelsel van H) en het domein van T bevat elk van de functies ϵ_n. De afsluiting van het domein van T is dus ook H. Verder, laat $\{f_n\}$ een convergente rij differentieerbare functies in H zijn met limiet f. Als de rij $\{f'_n\}$ eveneens convergeert en limiet g heeft, dan is $f' = T(f) = g$. Een operator T met deze eigenschap noemen we gesloten.

Definitie: Een operator $T : H \to H$ heet *gesloten* als voor elke convergente rij $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ geldt dat indien de rij $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergeert, en $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim_{n\to\infty} Tx_n$, dan is $x \in D(T)$ en $Tx = y$.

Stelling 4.1: Een gesloten operator is die als domein geheel H heeft is begrensd.

Voor een bepaalde klasse van niet-begrensde operatoren is de studie van het spectrum te herleiden tot een studie van het spectrum van compacte operatoren.

Zij $T \in \mathcal{L}(H)$. *Definitie:* Als $(id_H - \lambda \cdot T)$ inverteerbaar is en de inverse is begrensd, dan heet $R_\lambda(T) = (id_H - \lambda \cdot T)^{-1}$ de *resolvente operator* van T. Tussen het spectrum van T en van $R_\lambda(T)$ bestaat een nauwe betrekking:

Propositie 4.2: Zij $T : H \to H$ een lineaire operator waarvan de resolvente $R_\lambda(T)$ voor zekere $\lambda \in \mathbf{C}$ gedefinieerd is. Dan geldt:

i. Als $R_\lambda(T)$ compact is voor zekere $\lambda \in \mathbf{C}$, dan is $R_\mu(T)$ compact voor alle μ waarvoor $R_\mu(T)$ gedefinieerd is.

ii. $\mu \neq 0$ ligt in $\rho(R_\lambda(T))$ dan en slechts dan als $\lambda + 1/\mu \in \rho(T)$. Verder is μ eigenwaarde van $R_\lambda(T)$ dan en slechts dan als $\lambda + 1/\mu$ eigenwaarde van T.

Bewijs:

i. $R_\mu(T) = R_\lambda(T)(id_H + (\mu - \lambda)R_\mu(T))$ is het product van de compacte operator $R_\lambda(T)$ en de begrensde operator $id_H + (\mu - \lambda)R_\mu(T)$, en is dus zelf compact volgens Propositie 2.17.

ii. Neem aan dat voor zekere $\lambda \in \mathbf{C}$ de resolvente $R_\lambda(T)$ gedefinieerd is. Dan geldt:

$$\mu \in \rho(R_\lambda(T)) \Leftrightarrow R_\lambda(T) - \mu \cdot id_H \text{ inverteerbaar. } \Leftrightarrow$$

$$(T - \lambda)^{-1} - \mu \cdot id_H = (T - \lambda)^{-1}(1 - \mu(T - \lambda \cdot id_H)) \text{ inverteerbaar } \Leftrightarrow$$

$$T - (\lambda + 1/\mu) \cdot id_H \text{ inverteerbaar. } \Leftrightarrow \lambda + 1/\mu \in \rho(T).$$

Verder volgt uit $(T - \lambda \cdot id_H)^{-1}x = \mu x$ dat $Tx = (\lambda + 1/\mu)x$ en omgekeerd.

Gevolg: Het spectrum van een operator met compacte resolvente bevat hoogstens aftelbaar veel eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ en $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$. De bijbehorende eigenruimten zijn eindig-dimensionaal.

Een voorbeeld van een klasse van operatoren met compacte resolvente zullen we in de rest van dit hoofdstuk bestuderen.

§4.2. Sturm-Liouville-systemen.

Laat $p_0, p_1, p_2 : [a, b] \to \mathbf{R}$ continue functies zijn zodanig dat $p_0(x) > 0$ voor $x \in [a, b]$. De differentiaaloperator L' wordt gegeven door $L'y = p_0 y'' + p_1 y' + p_2 y$. Beschouw de eigenwaardenvergelijking $L'y + \lambda y = 0$ met zekere randvoorwaarden in $x = a$ en $x = b$. Vermenigvuldiging van de vergelijking $L'u + \lambda u = 0$ met $r(x) = \dfrac{1}{p_0(x)} \displaystyle\int_a^x \dfrac{p_1(t)}{p_0(t)} dt$ geeft $Lu + \lambda r u = 0$ waarbij $L = rL'$ een zelfgeadjungeerde differentiaaloperator is, dus Lu is van de vorm $Lu = (pu')' + qu$. Er geldt de *Lagrange-identiteit*

$$\int_a^b z(x) Ly(x) dx - \int_a^b y(x) Lz(x) dx = B(y, z)(b) - B(y, z)(a) \tag{4.1}$$

waarbij y, z tweemaal continu differentieerbare functies op $[a, b]$ zijn en $B(y, z) = p(zy' - yz')$. Als $B(y, z)(a) = B(y, z)(b)$, dan volgt uit (4.1) dat $\langle y, Lz \rangle = \langle Ly, z \rangle$ waarbij het inwendig product gegeven is door $\langle y, z \rangle = \int_a^b \overline{y(x)} z(x) dx$. Onder een van de volgende voorwaarden is dit het geval:

i. Voor zekere reële getallen h_1, h_2, niet beide nul voldoen de functies y en z aan de homogene randvoorwaarde $R_a y(a) := h_1 y'(a) + h_2 y(a) = 0$ en $R_a z(a) = 0$. Dan geldt dat $B(y, z)(a) = 0$. Analoog is $B(y, z)(b) = 0$ als er k_1, k_2 zijn, niet beide nul, zodat $R_b y(b) := k_1 y'(b) + k_2 y(b) = 0$ en $R_b z(b) = 0$. Dergelijke randvoorwaarden heten *regulier*.

ii. Als $p(a) = p(b)$ en als voor functies y, z geldt dat $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$ (analoog voor z) dan is $B(y, z)(a) = B(y, z)(b)$. Dergelijke randvoorwaarden heten *periodiek*.

iii. Als $p(a) = 0$ of $p(b) = 0$ of p is singulier in $x = a$ of $x = b$ dan heten de randvoorwaarden *singulier*. Om te zorgen dat $B(y, z)(a) = 0$ resp. $B(y, z)(b) = 0$, moeten de functies y (en z) uit het domein van L aan extra eisen voldoen, bijv. $y(x)$ begrensd voor $x \downarrow a$ (resp. $x \uparrow b$) en $p(x)y'(x) \to 0$ als $x \downarrow a$ (resp. $x \uparrow b$). Singuliere randvoorwaarden treden ook op als $a = -\infty$ of $b = \infty$. $p(a) = 0$ betekent dan uiteraard $\lim_{x \to -\infty} p(x) = 0$ (en analoog voor $b = \infty$).

De eigenwaardenvergelijking $Ly + \lambda r y = 0$ (met L zelfgeadjungeerd) samen met de randvoorwaarden (i), (ii) of (iii) heet een (regulier, periodiek, resp. singulier) *Sturm-Liouville* (of *S.L.*-)systeem. De operator L noemen we een Sturm-Liouville-operator. Het domein $D(L)$ van L wordt dan beperkt tot de tweemaal continu differentieerbare functies die aan de respectievelijke randvoorwaarden voldoen.

Een voorbeeld van een regulier S.L. systeem is het volgende: laat $[a, b] = [0, \pi]$, $Ly = y''$ en $r(x) = 1$ met reguliere randvoorwaarden $y(0) = y(\pi) = 0$. $y''(x) + \lambda y(x) = 0$ heeft voor $\lambda = 0$ de algemene oplossing $y(x) = Ax + B$ met constanten A en B en voor $\lambda \neq 0$ is de oplossing $y(x) = A \exp(i\sqrt{\lambda} x) + B \exp(-i\sqrt{\lambda} x)$. $y(0) = 0$ levert $B = 0$, resp. $A = -B$, $y(\pi) = 0$ levert $A = 0$ in het geval dat $\lambda = 0$, en $A \sin \sqrt{\lambda}\pi = 0$ als $\lambda \neq 0$. Alleen als $\sqrt{\lambda} = 1, 2, 3, \ldots$ is er een oplossing ongelijk aan de nuloplossing. De waarden $\lambda_n = n^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$ heten de *eigenwaarden* van het S.L. systeem, en de bijbehorende *eigenfuncties* worden gegeven door $y_n(x) = A' \sin nx$ (voor $A' \neq 0$). Merk op dat de eigenfuncties (samen met de nulfunctie) altijd een lineaire deelruimte van $D(L)$ vormen.

Een voorbeeld van een singulier S.L. systeem wordt gegeven door $((1 - x^2)y')' + \lambda y = 0$ op $[-1, 1]$. De eigenfuncties zijn de Legendre-polynomen $P_n(x)$ bij eigenwaarden $\lambda_n = n(n+1)$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Nog een voorbeeld is het S.L. systeem $(e^{-x^2} y')' + \lambda e^{-x^2} y = 0$ op $(-\infty, \infty)$ met eigenwaarden $\lambda_n = 2n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ en met als bijbehorende eigenfuncties de *Hermite-polynomen* $H_n(x)$ (waarbij de graad van H_n gelijk is aan n).
Nu geldt het volgende resultaat:

Propositie 4.3: Laat L een S.L. operator zijn op $[a, b]$ en beschouw het S.L. eigenwaardenprobleem $Ly + \lambda ry = 0$ voor zekere continue functie r met $r(x) > 0$ op (a, b). Dan geldt:

a. De eigenwaarden van het S.L. systeem zijn reëel, en er is een basis van reële eigenfuncties.

b. Eigenfuncties behorend bij verschillende eigenwaarden zijn orthogonaal t.a.v. het inproduct $\langle f, g\rangle_r = \int_a^b \overline{f(x)}g(x)r(x)dx$.

c. In het geval van een regulier S.L. systeem is bij elke eigenwaarde de bijbehorende eigenruimte 1-dimensionaal. Dit geldt ook als slechts een van de randvoorwaarden (in a of b) regulier is.

d. Als $Ly = (py')' + qy$ en $q(x) \leq 0$ op $[a, b]$ en de randvoorwaarden zijn periodiek of singulier of regulier met $h_1h_2 \leq 0$ en $k_1k_2 \geq 0$, dan zijn alle eigenwaarden niet-negatief.

Bewijs: (a.) Laat y een eigenfunctie zijn bij eigenwaarde λ, dus $Ly = -\lambda ry$. Dan is $L\overline{y} = -\overline{\lambda}r\overline{y}$. Wegens zelfgeadjungeerdheid van L geldt:

$$-\lambda \int_a^b r(x)|y(x)|^2dx = \int_a^b \overline{y}(x)Ly(x)dx = \int_a^b L\overline{y}(x)y(x)dx = -\overline{\lambda} \int_a^b r(x)|y(x)|^2dx$$

en omdat $\int_a^b r(x)|y(x)|^2dx > 0$ als $y \neq 0$ is $\lambda = \overline{\lambda}$, m.a.w. $\lambda \in \mathbf{R}$. Als y en $\overline{y}$ lineair afhankelijk zijn (over $\mathbf{C}$) dan is y op een (niet-essentiële) factor na reëel; als y en $\overline{y}$ lineair onafhankelijke eigenfuncties zijn, dan is het opspansel van y en $\overline{y}$ hetzelfde als het opspansel van $\mathrm{Re}(y)$ en $\mathrm{Im}(y)$. De eigenruimte van λ wordt dus opgespannen door reële functies.

b. Laat y, z eigenfuncties zijn bij verschillende eigenwaarden λ en μ. Dan $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ en

$$-\lambda \int_a^b r(x)\overline{y}(x)z(x)dx = \int_a^b L\overline{y}(x)z(x)dx = \int_a^b \overline{y}(x)Lz(x)dx = -\mu \int_a^b r(x)\overline{y}(x)z(x)dx$$

en omdat $\lambda \neq \mu$, is $\displaystyle\int_a^b \overline{y}(x)z(x)r(x)dx = 0$.

c. De tweede orde d.v. $Ly(x) + \lambda y(x)r(x) = 0$ heeft twee lineair onafhankelijke oplossingen. De reguliere randvoorwaarde $h_1y'(a) + h_2y(a) = 0$ legt vervolgens de oplossing op een constante na vast.

d. Laat y een eigenfunctie zijn met eigenwaarde λ. Uit $(py')' + qy + \lambda ry = 0$ en $R_ay(a) = R_by(b) = 0$ volgt dat

$$-\lambda \int_a^b r(x)y(x)^2dx = \int_a^b ((py')'(x)+q(x)y(x))y(x)dx = \int_a^b (-p(x)y'(x)^2+q(x)y(x)^2)dx+p(x)y'(x)y(x)\Big|_a^b \leq 0$$

zodat $\lambda \geq 0$. Merk op dat $\lambda = 0$ alleen als $q(x) \equiv 0$ en de eigenfunctie $y(x)$ constant is.

Dat Propositie 4.3(c) niet geldt als niet minstens een van de randvoorwaarden regulier is, zien we aan het periodieke S.L.systeem $y'' + \lambda y = 0$ op $[0, \pi]$. Eigenwaarden zijn $\lambda = n^2$ voor $n = 0, 1, \ldots$ en de eigenfuncties zijn $y(x) = A$ voor $n = 0$ en $y(x) = A\cos nx + B\sin nx$ voor $n = 1, 2, \ldots$. Voor de hierboven gegeven voorbeelden betekent de orthogonaliteit het volgende:

i. Voor het reguliere systeem $y'' + \lambda y = 0$ op $[0, \pi]$ met $y(0) = y(\pi) = 0$ met eigenfuncties $y_n(x) = \sin nx$ en $r(x) = 1$ is $\displaystyle\int_0^\pi \sin nx \sin mx dx = 0$ als $m \neq n$.

ii. Voor de Legendrepolynomen geldt $\displaystyle\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0$; voor de Hermitepolynomen is $r(x) = e^{-x^2}$ en we hebben dan $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}dx = 0$ $(n \neq m)$. Systemen van polynomen $p_0, p_1, \ldots$

die orthogonaal zijn t.a.v. een inproduct $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)r(x)dx$ waarbij $r(x) > 0$ op (a,b) en waarvoor de graad van p_n gelijk is aan n heten *orthogonale polynomen.* Andere klassieke voorbeelden zijn de *Laguerrepolynomen* L_n die orthogonaal zijn t.a.v. het inproduct $\langle f,g\rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx$ en de *Chebyshevpolynomen* die orthogonaal zijn t.a.v. het inproduct $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

D.m.v. een *Liouville-transformatie* kunnen we ervoor zorgen dat de eigenwaardenvergelijking $Ly+\lambda ry = (py')'+qy+\lambda ry = 0$ de simpele vorm $z''(x)+(\lambda-Q(x))z(x) = 0$ krijgt: laat $y(x) = w(x)z(\xi)$ voor $\xi(x) = \displaystyle\int_a^x \sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}}dx$ en $w(x) = (r(x)p(x))^{-1/4}$. Dan is $z''(\xi)+(\lambda-Q(x(\xi)))z(\xi) = 0$ op $[0,\beta]$ (voor $\beta = \xi(b)$) waarbij $Q(x) = -Lw(x)/(r(x)w(x))$. Merk op dat $\xi(x)$ een monotoon stijgende functie is van x en dat $Q(x)$ continu is op $[a,b]$ in het geval van een regulier S.L. systeem. Verder geven reguliere randvoorwaarden voor y aanleiding tot reguliere randvoorwaarden voor z. Deze vorm van het eigenwaardenprobleem is o.a. nuttig als we het gedrag van de eigenfuncties voor grote λ willen bekijken.

De operator L is niet begrensd. We laten zien dat in het geval van reguliere randvoorwaarden L een operator met compacte resolvente is.

We nemen aan dat $r(x) = 1$ (maar laten $p(x)$ algemeen zijn i.v.m. latere toepassingen). Omdat niet alle reële λ eigenwaarden zijn van het S.L.systeem, kunnen we aannemen (door q te vervangen door $q+\lambda$ voor zekere λ) dat $\lambda = 0$ geen eigenwaarde is, m.a.w. de d.v. $Ly = 0$ heeft geen andere oplossingen die aan de gegeven (reguliere) randvoorwaarden $R_ay(a) = R_by(b) = 0$ voldoen dan $y = 0$. We construeren nu een (continue) functie $G : [a,b]\times[a,b] \to \mathbf{R}$ zodanig dat de operator G met $Gf(x) = \int_a^b G(t,x)f(t)dt$ de inverse is van L (met domein $D(L) = D$). G heet een *Greense functie* bij de S.L.operator L met randvoorwaarden $R_ay(a) = R_by(b) = 0$. G moet voldoen aan de volgende eigenschappen:

i. Voor $x \in (a,b), x \neq t$ is $G(x,t)$ tweemaal continu differentieerbaar en voldoet aan $L_xG(x,t) = 0$ (de index x in L_x geeft aan dat L als differentiaaloperator op x werkt).
ii. Voor $x = a,b$ is $G(x,t)$ eenmaal continu (rechts- resp. links)differentieerbaar en voldoet aan de randvoorwaarden $R_aG(a,t) = 0, R_bG(b,t) = 0$.
iii. $G(x,t)$ is continu voor $x \in [a,b]$.
iv. In $x = t \in (a,b)$ maakt de afgeleide $\frac{\partial G}{\partial x}$ een sprong en er geldt:

$$\lim_{\epsilon\to 0} p(t)\big(\frac{\partial G}{\partial x}(t+\epsilon,t) - \frac{\partial G}{\partial x}(t-\epsilon,t)\big) = 1.$$

We laten eerst zien dat $G(x,t)$ goed gedefinieerd is: laat $u(x) \neq 0$ een oplossing zijn van het beginwaardenprobleem $Lu = 0$, $R_au(a) = 0$. u ligt op een constante factor na vast. Analoog, laat $v(x) \neq 0$ een oplossing zijn van $Lv = 0$, $R_bv(b) = 0$. Dan is $G(x,t) = c_1(t)u(x)$ voor $x < t$ en $G(x,t) = c_2(t)v(x)$ voor $x > t$ waarbij c_1, c_2 functies van $t \in [a,b]$ zijn. Continuïteit van G levert dat $G(x,x) = c_1(x)u(x) = c_2(x)v(x)$, dus $c_1(t) = c_0(t)v(t)$ en $c_2(t) = c_0(t)u(t)$ voor zekere functie c_0. Uit de laatste voorwaarde volgt, omdat u, v continu differentieerbaar zijn, dat $c_0(t)p(t)(v'(t)u(t) - v(t)u'(t)) = 1$. Door differentiëren zien we in dat de factor $p(t)(v'(t)u(t) - v(t)u'(t))$ constant en niet-nul op (a,b) is. Hieruit volgt dus dat $G(x,t) = \begin{cases} C_0u(x)v(t) & \text{voor } x \leq t \\ C_0u(t)v(x) & \text{voor } x \geq t \end{cases}$ voor zekere constante $C_0 \neq 0$. In het bijzonder is $G(x,t) = G(t,x)$.

Voorbeeld. We beschouwen het geval dat $Ly = y''$ en de randvoorwaarden zijn gegeven door $y(0) = y(\pi) = 0$. Eerder hebben we gezien dat de eigenwaarden gelijk zijn aan $\lambda_n = n^2$ voor $n = 1,2,\ldots$

en de eigenfuncties zijn $u_n(x) = \sin nx$. De oplossing van $u'' = 0$ met $u(0) = 0$ is $u(x) = Ax$; de oplossing van $v'' = 0$ met $v(\pi) = 0$ is $v(x) = B(x-\pi)$. Dus is $G(x,t) = \begin{cases} Cx(t-\pi) & \text{als } x \leq t \\ Ct(x-\pi) & \text{als } x \geq t \end{cases}$.
De eis dat $\lim_{\epsilon\to 0} \partial_x G(t+\epsilon,t) - \partial_x G(t-\epsilon,t) = 1$ levert voor C de waarde $\frac{1}{\pi}$.
We tonen nu aan dat uit $Ly = -\lambda y$, $R_a y(a) = R_b y(b) = 0$ volgt dat $y = -\lambda G y$:

Lemma 4.4: Laat f een tweemaal continu differentieerbare functie op $[a,b]$ zijn. Dan geldt

$$\int_a^b G(x,t) L_x f(x) dx = f(t) - B(f,G)(a) + B(f,G)(b), \tag{4.2}$$

waarbij

$$B(f,G)(x) = p(x)\big(f'(x)G(x,t) - f(x)\frac{\partial G}{\partial x}(x,t)\big). \tag{4.3}$$

Bewijs:

$$\int_a^b G(x,t) L_x f(x) dx = \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_a^{t-\epsilon} + \int_{t+\epsilon}^b\Big)\big((p(x)f'(x))' + q(x)f(x)\big)G(x,t)dx =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_a^{t-\epsilon} + \int_{t+\epsilon}^b\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}\big(p(x)\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}\big) + q(x)G(x,t)\Big)f(x)dx +$$

$$+ \lim_{\epsilon\to 0} p(x)\big(G(x,t)f'(x) - \frac{\partial G}{\partial x}(x,t)f(x)\big)\Big|_a^{t-\epsilon} + \Big|_{t+\epsilon}^b =$$

$$= -B(f,G)(a) + B(f,G)(b) + \lim_{\epsilon\to 0} f(t)p(t)\big(\frac{\partial G}{\partial x}(t+\epsilon,t) - \frac{\partial G}{\partial x}(t-\epsilon,t)\big) =$$

$$= f(t) - B(f,G)(a) + B(f,G)(b).$$

Hieruit volgt onmiddellijk dat $y(t) = -\lambda \int_a^b G(x,t)y(x)dx$ als y een eigenfunctie is van het reguliere S.L.probleem met eigenwaarde λ.
Omgekeerd, laat $v(t) = \int_a^b G(x,t)f(x)dx$. Dan is y differentieerbaar op (a,b) en

$$v'(t) = \int_a^t \frac{\partial G(x,t)}{\partial t} f(x)dx + \int_t^b \frac{\partial G(x,t)}{\partial t} f(x)dx,$$

en

$$\big(p(t)v'(t)\big)' = \int_a^t \frac{\partial}{\partial t}\big(p(t)\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}\big)f(x)dx + \int_t^b \frac{\partial}{\partial t}\big(p(t)\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}\big)f(x)dx +$$

$$+ \lim_{\epsilon\downarrow 0} \frac{\partial G}{\partial t}(t-\epsilon,t)p(t)f(t) - \frac{\partial G}{\partial t}(t+\epsilon,t)p(t)f(t).$$

Uit $\frac{\partial}{\partial t}\big(p(t)\frac{\partial G}{\partial t}(x,t)\big) + q(t)G(x,t) = 0$ voor $x \neq t$ volgt dan dat

$$L_t \int_a^b G(x,t)f(x)dx = Lv(t) = (p(t)v'(t))' + q(t)v(t) = f(t) \tag{4.4}$$

dus $LGy = y$.

Conclusie: laat $D = \{f \in L_2(a,b) : Lf \in L_2(a,b) \text{ en } R_a f(a) = R_b f(b) = 0\}$. Dan is L een operator met domein D en op D is $G = L^{-1}$, d.w.z. dat $GLf = f$ voor $f \in D$ en $LGh = h$ voor $h \in L_2(a,b)$.

De operator G is zelfgeadjungeerd en bovendien Hilbert-Schmidt en dus compact (vergelijk voorbeeld 4 van §2.5). M.b.v stelling 2.21 en de formules voor de Liouville-substitutie volgt nu de spectraalstelling voor reguliere Sturm-Liouvillesystemen:

Stelling 4.5: Beschouw op het interval $[a,b]$ met a, b reëel en $a < b$ het reguliere Sturm-Liouville-eigenwaardenprobleem $Ly = -\lambda ry$ met randvoorwaarden $R_a y(a) = R_b y(b) = 0$, waarbij $Ly = (py')' + qy$ en p, p', q, r continue functies op $[a,b]$ zijn, $p(x) > 0$, $r(x) > 0$ en p tweemaal differentieerbaar op (a,b). De eigenwaarden zijn reëel en vormen een stijgende rij $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$ die naar ∞ stijgt. De eigenruimten zijn eendimensionaal en de eigenfuncties $y_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ vormen een orthogonale basis van $H = L_2(a,b)_r$. De eigenfunctie y_n heeft precies n nulpunten op (a,b).

Het feit dat de eigenwaarden op eindig veel na positief zijn volgt uit Propositie 4.3d. De uitspraak over de nulpunten volgt niet uit operatorentheorie; we zullen deze hier niet bewijzen.

Voorbeeld. Beschouw het S.L.systeem $Ly = y'', y(0) = y(\pi) = 0$. De eigenfuncties zijn $y_n(x) = \sin nx$ voor $n = 1, 2, \ldots$ en de eigenwaarden zijn $\lambda_n = n^2$.

Opmerking: Uit de hermiticiteit van de operator $G = L^{-1}$ volgt nog, m.b.v. Stelling 2.29(v), dat voor $f \in L_2(a,b)_r$,

$$Gf = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \frac{\langle y_n, f\rangle}{\langle y_n, y_n\rangle} y_n. \tag{4.5}$$

Voor het bovenstaande voorbeeld volgt hieruit dat

$$G(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \cdot \frac{y_n(x) y_n(t)}{\langle y_n, y_n\rangle} = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin nt}{n^2}.$$

§4.3. Inhomogene Sturm-Liouvilleproblemen en Greense functies.

We beschouwen het inhomogene randwaardenprobleem gegeven door

$$Ly = (py')' + qy = f, \quad R_a y(a) = r, R_b y(b) = s \tag{4.6}$$

Laat $G(x,t)$ de Greense functie zijn bij de S.L.operator L bij randvoorwaarden R_a en R_b.

Propositie 4.6: Laat op $[a,b]$ het inhomogene Sturm-Liouvilleprobleem (4.6) gegeven zijn. Neem aan dat de homogene vergelijking met $f = 0$, $s = t = 0$ alleen de nuloplossing heeft. Dan is de oplossing van (4.6) uniek en wordt gegeven door

$$y(t) = \int_a^b f(x) G(x,t) dx + B(y,G)(a) - B(y,G)(b) \tag{4.7}$$

waarbij $B(y,G)$wordt gegeven door (4.3).

Bewijs: Neem eerst aan dat $r = s = 0$. Uit (4.4) weten we dat $y_0(t) = \int_a^b f(x)G(x,t)dx$ een oplossing van (4.6) is. Deze oplossing is uniek omdat als $z_0(t)$ een andere oplossing is, dan is $y_0(t) - z_0(t)$ een oplossing van het homgene S.L.systeem met $f = 0$ en $r = s = 0$ en volgens de aanname heeft dit systeem alleen de nuloplossing. Neem vervolgens aan dat $f = 0$. Laat w een tweemaal continu differentieerbare functie zijn die voldoet aan de randvoorwaarden $R_a w = r, R_b w = s$ (er is een polynoom van graad hoogstens 2 dat voldoet). Laat $z = y - w$. Dan voloet z aan het inhomogene randwaardenprobleem $Lz = -Lw$, $R_a z = R_b z = 0$. Dan is volgens Lemma 4.4 en het bovenstaande

$$z(t) = -\int_a^b G(x,t)Lw(x)dx = -w(t) + B(w,G)(a) - B(w,G)(b).$$

Daar $z + w = y$ is $B(y,G)(x) = B(w,G)(x)$ voor $x = a$ en $x = b$ en de oplossing y voor het geval dat $f = 0$ gelijk aan

$$y_1(t) = B(y,G)(a) - B(y,G)(b).$$

De oplossing van (4.6) is nu gelijk aan de som $y = y_0 + y_1$.

Voorbeeld. Beschouw het inhomogene Sturm-Liouvilleprobleem $y'' = f, y(0) = r, y(\pi) = s$ op $[0,\pi]$. M.b.v. de Greense functie $G(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x(t-\pi) & \text{als } x \le t \\ \frac{1}{\pi}t(x-\pi) & \text{als } x \ge t \end{cases}$ en (4.7) is de oplossing te schrijven als

$$y(t) = \int_0^\pi f(x)G(x,t)dx + B(y,G)(0) - B(y,G)(\pi) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^t f(x)x(t-\pi)dx + \frac{1}{\pi}\int_t^\pi f(x)t(x-\pi)dx + r(1-t/\pi) + st/\pi.$$

Tenslotte merken we op dat de Greense functie $G(x,t)$ de oplossing is - in de zin van distributies - van het randwaardenprobleem

$$Ly(x) = (p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \delta(x-t), \quad R_a y(a) = 0, R_b y(b) = 0 \tag{4.8}$$

Laat immers $\phi : [a,b] \to \mathbf{R}$ een testfunctie zijn die aan de randvoorwaarden $R_a\phi(a) = R_b\phi(b) = 0$ voldoet. Dan geldt volgens Lemma 4.4

$$(L_x G(.,t), \phi) = (G(.,t), L_x\phi) = \int_a^b G(x,t)L_x\phi(x)dx = \phi(t) = (\delta_t, \phi)$$

met het inproduct gedefinieerd door $(f,\phi) = \int_a^b \overline{f(x)}\phi(x)dx$ (vergelijk §2.7).

§4.4. Asymptotisch gedrag van de oplossingen voor grote waarden van λ.

Beschouw het reguliere S.L.systeem

$$(py')' + qy + \lambda ry = 0, \qquad R_a y(a) = R_b y(b) = 0.$$

D.m.v. een Liouville-transformatie brengen we het systeem in de vorm

$$z''(t) + (Q(t) + \lambda)z(t) = 0, \qquad R'_\alpha z(0) = R'_\beta z(\beta) = 0.$$

Hierbij is $t(a) = 0, t(b) = \beta$ en R'_0, R'_β zijn de corresponderende randvoorwaarden voor z. Net als R_a, R_b zijn R'_0, R'_β lineair en homogeen in z, z'. We laten $\lambda = \lambda_n$ en $z = z_n$ een bijbehorende eigenfunctie zijn. Schrijf $S(t) = Q(t) + \lambda$. We voeren variabelen $\phi = \phi(t)$ en $A = A(t)$ in en schrijven

$$z(t) = A \sin\phi, \quad z'(t) = A\sqrt{S}\cos\phi.$$

Dan volgt

$$\phi'(t) = \sqrt{S(t)} + \frac{S'(t)}{4S(t)} \sin 2\phi(t), \qquad \frac{A'(t)}{A(t)} = -\frac{S'(t)}{2S(t)} \cos^2\phi(t).$$

Voor $\lambda = \lambda_n$ groot is $S(t) >> 0$ voor alle $t \in [0, \beta]$ dus ϕ is een stijgende functie en

$$\phi'(t) = \sqrt{\lambda_n} + O(1/\sqrt{\lambda_n}), \quad A'(t)/A(t) = O(1/\lambda_n).$$

Primitiveren geeft

$$\phi(t) = \sqrt{\lambda_n} t + \phi_0 + O(1/\sqrt{\lambda_n}), \qquad A(t) = A_0 + O(1/\lambda_n).$$

Bekijk nu het geval dat $R'_\alpha z = R'_\beta z = z$, dus $z(0) = z(\beta) = 0$. Omdat z_n n nulpunten heeft in $(0, \beta)$ kunnen we aannemen dat $\phi(0) = 0, \phi(\beta) = n\pi$. Dan is $\sqrt{\lambda_n}\beta = n\pi + O(1/\sqrt{\lambda})$ en dus

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{\beta} + O(\frac{1}{n}), \qquad A = A_0 + O(1/n).$$

Dan is

$$z_n(t) = A_0 \sin(\frac{n\pi}{\beta} t + O(1/n)) + O(1/n).$$

Opmerking: M.b.v. dezelfde transformatie $\phi = \phi(t), A = A(t)$ is het ook mogelijk om het gedrag van oplossingen van tweede-orde randwaardenproblemen op onbegrensde intevallen voor grote waarden van de parameter t te bepalen. Een voorbeeld voor Besselfuncties wordt gegeven in een van de opgaven.

§4.5. Toepassing: de methode van scheiden van variabelen.

Eendimensionale Sturm-Liouvillesystemen treden op bij een methode om rand- of beginwaardenproblemen op te lossen die bekend staat als "scheiden van variabelen". Hieronder volgen een paar voorbeelden.

Voorbeeld 1. Beschouw de *vergelijking van Laplace* $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ op het vierkant $0 < x < 1, 0 < y < 1$ in $\mathbf{R}^2$ met randvoorwaarden $u(x, 0) = u(x, 1) = 0, u(0, y) = f(y), u(1, y) = g(y)$. We nemen aan dat $u(x, y)$ op de afsluiting van het vierkant (d.w.z. in het inwendige en op de rand) continu is, eventueel m.u.v. de vier randpunten. Een tweemaal continu partieel differentieerbare functie die aan de vergelijking van Laplace voldoet heet *harmonisch.* De methode van scheiden van variabelen bestaat eruit om $u(x, y)$ als aanzet te schrijven als een product $X(x)Y(y)$. Invullen in de differentiaalvergelijking (d.v.) geeft $X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$, en als u niet de nuloplossing is, kunnen we delen door $X(x)Y(y)$. Dit levert $\dfrac{X''(x)}{X(x)} + \dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = 0$ ofwel $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\dfrac{Y''(y)}{Y(y)}$. Omdat in deze vergelijking het linkerlid alleen van x afhangt en het rechterlid alleen van y, moeten beide leden constant zijn. Dit levert, als we de constante λ noemen,

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \quad Y(0) = Y(1) = 0.$$

De randvoorwaarden voor Y zijn afkomstig uit de homogene randvoorwaarden voor $y = 0$ en $y = 1$. Voor X kunnen we geen randvoorwaarden aangeven. Het systeem $Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, Y(0) = Y(1) = 0$ is een regulier Sturm-Liouvillesysteem en heeft eigenwaarden $\lambda = n^2\pi^2$ voor $n = 1, 2, \dots$ en eigenfuncties $Y_n(y) = \sin n\pi y$. Voor $X'' - n^2\pi^2 X = 0$ vinden we de oplossing $X_n(x) = A\cosh n\pi x + B\sinh n\pi x$. Voor de algemene oplossing $u(x, y)$ nemen we een superpositie $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi y(A_n\cosh n\pi x + B_n \sinh n\pi x)$. Het stelsel eigenfuncties Y_n vormt een volledig orthogonaal systeem en $\int_0^1 Y_n(y)Y_m(y)dy = 0$ voor $n \neq m$. De coëfficiënten A_n en B_n kunnen we nu vinden door de randvoorwaarden voor $x = 0$ en $x = 1$ in te vullen. Dit geeft

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi y, \qquad g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cosh n\pi + B_n \sinh n\pi) \sin n\pi y.$$

Voor f en g zijn dit de Fourierreeksen t.a.v. het orthogonale stelsel eigenfuncties $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en als f en g voldoende nette functies zijn (bijv. eenmaal stuksgewijs differentieerbaar op $(0, 1)$), geldt zelfs puntsgewijze convergentie van de Fourierreeks. De Fouriercoëfficiënten zijn

$$A_n = \frac{\langle Y_n, f\rangle}{\langle Y_n, Y_n\rangle} = \frac{\int_0^1 f(y)\sin n\pi y dy}{\int_0^1 \sin^2 n\pi y dy} = 2\int_0^1 f(y)\sin n\pi y dy$$

en analoog is $A_n \cosh n\pi + B_n \sinh n\pi = 2\int_0^1 g(y)\sin n\pi y dy$.

Voorbeeld 2. Beschouw de *vergelijking van Laplace* $\Delta u = 0$ op de cirkelschijf $x^2 + y^2 < 1$ in $\mathbf{R}^2$ met randvoorwaarde $u(1, \phi) = f(\phi)$. We gebruiken poolcoördinaten en schrijven $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi}$. Schrijf als aanzet $u(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$. Invullen in de d.v. en delen door $R(r)\Phi(\phi)$ geeft $\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)}$. Daar het linkerlid niet van ϕ en het rechterlid niet van r afhangt, zijn beide leden gelijk aan een constante λ. Dit geeft de twee gewone d.v.

$$r^2R''(r) + rR(r) - \lambda R(r) = 0, \qquad \Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0.$$

De d.v. voor Φ samen met de periodiciteitsvoorwaarden $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$ en $\Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$ vormt een periodiek S.L.systeem met eigenwaarden $\lambda_n = n^2$ $(n = 0, 1, \dots)$ en een volledig orthogonaal stelsel van eigenfuncties $\Phi_0(\phi) = 1$ en $\Phi_n^{(1)}(\phi) = \sin n\phi, \Phi_n^{(2)}(\phi) = \cos n\phi$. De d.v. voor R wordt nu $R(r) = r^2R''(r) + rR'(r) - n^2R(r) = 0$. Dit is een d.v. van Euler (de coëfficiënt van $R^{(k)}$ is $a_k r^k$) en heeft als oplossing $R_0(r) = A + B\ln r$ voor $\lambda = 0$ en $R_n(r) = Ar^n + Br^{-n}$ voor $\lambda = n^2 > 0$. Omdat $R(r)$ continu moet zijn voor $r \downarrow 0$, is $R_n(r) = Ar^n$ voor $n = 0, 1, \dots$. De oplossing $u(r, \phi)$ schrijven we nu als een superpositie $u(r,\phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n r^n \cos n\phi + B_n r^n \sin n\phi)$. De waarden van A_n en B_n volgen uit de randvoorwaarde in $r = 1$: $f(\phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi)$ geeft

$$A_n = \frac{\langle f, \Phi_n^{(2)}\rangle}{\langle \Phi_n^{(2)}, \Phi_n^{(2)}\rangle} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\cos n\phi d\phi, \quad A_0 = \frac{\langle f, \Phi_0\rangle}{\langle \Phi_0, \Phi_0\rangle} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)d\phi.$$

$$B_n = \frac{\langle f, \Phi_n^{(1)} \rangle}{\langle \Phi_n^{(1)}, \Phi_n^{(1)} \rangle} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \sin n\phi d\phi.$$

Voorbeeld 3. Beschouw het eigenwaardenprobleem $\Delta u + \mu u = 0$ op de eenheidsschijf $r < 1$ met randvoorwaarden $u(r = 1, \phi) = 0$. In poolcoördinaten wordt de d.v. $r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\phi\phi} + \mu r^2 u = 0$. De aanzet $u(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$ levert $\dfrac{r^2 R''(r) + rR'(r) + \mu r^2 R(r)}{R(r)} = -\dfrac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = \lambda$ waarbij λ constant is (vergelijk voorbeeld 2). Voor $\Phi(\phi)$ vinden we hetzelfde periodieke S.L.systeem als in voorbeeld 2, dus i.h.b. is $\lambda = n^2$ voor $n = 0, 1, \ldots$. De differentiaalvergelijking voor R wordt nu $r^2 R''(r) + rR(r) + (\mu r^2 - n^2)R(r) = 0$. Voor $\mu = 1$ is dit de d.v. van Bessel. De oplossingen zijn dus $R(r) = AJ_n(\sqrt{\mu} r) + BY_n(\sqrt{\mu} r)$. Hierbij is J_n de Besselfunctie van orde n en Y_n de Neumannfunctie van orde n. Y_n heeft een logaritmische singulariteit in $r = 0$, terwijl J_n continu is. Dus is $B = 0$ en de randvoorwaarde levert $R(1) = J_n(\sqrt{\mu}) = 0$. De Besselfunctie $J_n(z)$ heeft oneindig veel reële (maar geen niet-reële) nulpunten $z = \pm\alpha_{n1}, \pm\alpha_{n2}, \ldots$ (waarbij $0 < \alpha_{n1} < \alpha_{n2} < \ldots$) en verder is $z = 0$ een nulpunt van J_n voor $n > 0$. De eigenwaarden zijn dus $\mu_{nm} = \alpha_{nm}^2$ voor $m = 1, 2, \ldots$ en de eigenfuncties zijn $J_n(\alpha_{nm} r) \sin n\phi$ en $J_n(\alpha_{nm} r) \cos n\phi$ voor $n, m = 1, 2, \ldots$ en voor $n = 0$ alleen $J_0(\alpha_{0m} r)$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Ga nu zelf na dat voor vaste n de orthogonaliteitsrelatie voor de Besselfuncties luidt $\int_0^1 J_n(\alpha_{nm} x) J_n(\alpha_{np} x) x dx = 0$ voor $m \neq p$.