# OPGAVEN

## BIJ HET COLLEGE

# LINEAIRE ALGEBRA 2

********

**R.J.Kooman**

**Universiteit Leiden**

**najaar 2007**

In de opgaven gebruiken we de notatie $K$ voor het lichaam van scalairen van een vectorruimte. In alle gevallen mag verondersteld worden dat $K = \mathbf{R}$ of $\mathbf{C}$.

## I. Algemene begippen.

**Vectorruimten, lineaire deelruimten, dimensie en basis.**

**1.** Ga na of de volgende verzamelingen vectorruimten zijn: indien dit niet het geval is, geef dan aan aan welke van de axioma's 1-8 niet is voldaan.

a. $V$ is de verzameling geordende paren reële getallen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging $\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ y \end{pmatrix}$.

b. $V$ als in (a) maar met de gebruikelijke scalaire vermenigvuldiging en optelling $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 1 \\ y_1 + y_2 + 1 \end{pmatrix}$.

c. De verzameling reële inverteerbare $2\times 2$-matrices met de gebruikelijke (componentsgewijze) optelling en scalaire vermenigvuldiging.

d. De verzameling vectoren in $\mathbf{C}^2$ van de vorm $\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}$ met de gebruikelijke componentsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging.

e. De verzameling van alle bovendriehoeksmatrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging.

f. $\mathbf{R}^\infty$, de verzameling van alle oneindige rijtjes $(x_1, x_2, \ldots)$ reële getallen met de componentsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging.

**2.** Ga van de volgende deelverzamelingen $W \subset V$ na of het lineaire deelruimten zijn van de vectorruimte $V$.

a. $V = \mathcal{M}(n \times n, \mathbf{C})$ en $W$ is de deelverzameling van echte bovendriehoeksmatrices, d.w.z. $A = (A_{ij}) \in W$ als $A_{ij} = 0$ voor $j \leq i$.

b. $V = \mathcal{M}(n \times n, \mathbf{C})$ en $W$ bestaat uit de antisymmetrische $n \times n$-matrices (m.a.w. $A \in W$ als $A^T = -A$).

c. $V = \mathbf{C}^n$ en $W = \mathbf{R}^n$.

d. $V = \mathbf{C}^n$ en $W$ bestaat uit de vectoren $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ zodanig dat $x_1 + \ldots + x_n = 0$.

e. $V = P(\mathbf{C})$ is de vectorruimte van polynomen met complexe coëfficiënten en $W$ is de verzameling van polynomen in $V$ van graad precies $n$ $(n > 0)$ samen met het nulpolynoom.

f. $V$ is de vectorruimte van continue reële functies op $[-1, 1]$ en $W$ bestaat uit de functies $f \in V$ zodanig dat $f(1) = 0$.

f. $V$ als in (e), $W$ bevat de functies $f \in V$ met $f(0) = 1$.

g. $V = \mathbf{R}^\infty$, $W$ bestaat uit alle rijtjes $(x_1, x_2, \ldots)$ zodanig dat alle componenten $x_i$ op eindig veel na nul zijn.

**3.** Laat $V$ een vectorruimte zijn. Bewijs dat voor alle $v \in V$ geldt dat $(-1) \cdot v = -v$.

**4.** $U$ en $W$ zijn lineaire deelruimten van een vectorruimte $V$.

a. Toon aan dat de doorsnede $U \cap W$ een lineaire deelruimte van $V$ is.

b. Is de vereniging $U \cup W$ een lineaire deelruimte van $V$?

c. Beredeneer dat de *som* $U + W = \{u + w | u \in U, w \in W\}$ de kleinste lineaire deelruimte van $V$ is die zowel $U$ als $W$ bevat.

**5.** Bepaal van de volgende lineaire deelruimten $W$ van $V$ de dimensie en geef een basis van $W$ aan:

a. $V = \mathcal{M}(n \times n, \mathbf{C})$ en $W = \mathrm{Sym}^n(\mathbf{C})$, de symmetrische $n \times n$-matrices.

b. $V$ als in (a), $W = \mathrm{Ant}^n(\mathbf{C})$, de antisymmetrische $n \times n$-matrices.

c. $V = P(\mathbf{C})$ en $W$ bestaat uit de polynomen $P$ van graad hoogstens $N$ zodanig dat $P(-1) = 0$.

d. $V = P(\mathbf{C})$, $W = \mathrm{span}\{1 - X, X - X^2, X^2 - X^3, 1 - X^3\}$.

e. $V = C(\mathbf{R})$, de vectorruimte van continue reële (of complexe) functies op $\mathbf{R}$, $W = \mathrm{span}\{1, \sin x, \cos x, \sin^2 x, \cos^2 x\}$.

f. $V = P(\mathbf{C})$ en $W$ bestaat uit de polynomen van graad hoogstens $N$ zodanig dat $P(1) = 0$ en $P'(0) = 0$.

**6.** De *hermites geadjungeerde* $U^*$ van een complexe matrix $U$ is de matrix die wordt verkregen door $U$ te transponeren en vervolgens de alle elementen van de matrix complex te conjugeren, m.a.w. $U^* = \overline{U^T} = \overline{U}^T$. Een vierkante complexe matrix $U$ heet *hermites* resp. *antihermites* als $U = U^*$ resp. $U = -U^*$.

a. Toon aan dat alle hermitese $n \times n$-matrices een reële vectorruimte vormen. Bepaal ook de dimensie en geef een basis aan.

b. Doe hetzelfde voor de antihermitese $n \times n$-matrices.

c. Vormen de hermitese resp. antihermitese $n \times n$-matrices ook een complexe vectorruimte?

**Lineaire afbeeldingen en matrices.**

**7.** Ga van de volgende afbeeldingen $T : V \to W$ na of het lineaire afbeeldingen zijn. Zo ja, bepaal dan het bereik $\mathrm{im}(T) = T(V)$ en de kern $\ker(T)$. Geef tevens aan of $T$ injectief dan wel surjectief is.

a. $V = P_3(\mathbf{C})$ (de polynomen van graad hoogstens 3), $W = P_4(\mathbf{C})$ en $T(p)(x) = xp(x)$.

b. $V = W = P_3(\mathbf{C})$ en $T(p)(x) = p(x + 1)$.

c. $V = W = \mathbf{R}^3$ en $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \mathbf{a}$ waarbij $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$ een vaste vector is.

d. $V = W = C[a, b]$ (de reële continue functies op $[a, b] \subset \mathbf{R}$), $T(f) = f^2$.

e. $V = C[a, b]$, $W = \mathbf{R}$, $T(f) = \int_a^b f(x)e^{-x}dx$.

f. $V = W = \mathbf{R}^\infty$, $T(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$.

g. $V = W = \mathbf{R}^\infty$, $T(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$.

h. $V = \mathcal{M}(2 \times 2, \mathbf{C})$, $W = \mathbf{C}$ en $T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$.

i. $V = C^1[a,b]$, de vectorruimte van continu differentieerbare functies op $[a,b]$, $W = C[a,b]$ en $T(f) = f'$.

**8.** Laat $V, W$ vectorruimten zijn. $T : V \to W$ is een lineaire afbeelding.

a. Zij $U$ een lineaire deelruimte van $V$. Bewijs dat het beeld $T(U)$ een lineaire deelruimte is van $W$.

b. Ga na dat $\dim(T(U)) \leq \dim(U)$ (hint: laat zien dat $T(U)$ wordt opgespannen door de beelden van de basisvectoren van $U$).

**9.** Bepaal de matrix van de volgende lineaire afbeeldingen:

a. $T : P_n(\mathbf{C}) \to P_n(\mathbf{C})$ gegeven door $T(p) = p'$ t.o.v. de basis $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$.

b. $T : P_n(\mathbf{C}) \to P_{n+1}(\mathbf{C})$ gegeven door $T(p) = Xp$ t.o.v. de bases $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ en $\{1, X, \ldots, X^{n+1}\}$.

c. $T : \mathcal{M}(2 \times 2, \mathbf{C}) \to \mathcal{M}(2 \times 2, \mathbf{C})$ gegeven door $T(A) = A^T$ t.o.v. de basis $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ waarbij de *elementaire matrix* $E_{ij}$ de matrix is met een 1 in de $i$-e rij en $j$-e kolom, en verder overal nullen (m.a.w. $(E_{ij})_{k\ell} = \delta_{ik}\delta_{j\ell}$).

d. $T : \mathcal{M}(2 \times 2, \mathbf{C}) \to \mathcal{M}(2 \times 2, \mathbf{C})$ gegeven door $T(A) = AB$ t.o.v. dezelfde basis als in (c), waarbij $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

**10.** Laat $V = AH_3$ de (reële) vectorruimte van de antihermitese $3 \times 3$-matrices zijn (vergelijk opgave 7).

a. Toon aan dat de afbeelding $C : AH_3 \to AH_3$ gegeven door $C(U) = \bar{U}$ een inverteerbare lineaire afbeelding is.

b. Bepaal de matrix van $C$ t.o.v. een zelfgekozen basis.

**11**a. $T : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ is een lineaire afbeelding met matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1-i & -3i \end{pmatrix}$ t.o.v. de standaardbasis $\{e_1, e_2\}$. $\mathbf{C}^2$ kan ook opgevat worden als een vierdimensionale reële vectorruimte $W$ met basis $\{e_1, e_2, ie_1, ie_2\}$. Bepaal de matrix van $T : W \to W$ ten opzichte van deze basis.

b. Laat nu $T : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ een lineaire afbeelding zijn met standaardmatrix $A + iB$. Hierbij zijn $A$ en $B$ reële $n \times n$-matrices. Vat nu $T$ op als een afbeelding $\tilde{T} : W \to W$ van de $2n$-dimensionale reële vectorruimte $W = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n\}$. Druk de matrix van $\tilde{T}$ uit in termen van $A$ en $B$.

**12.** Toon aan: als $V$ een vectorruimte van dimensie 2 is en $T : V \to V$ een lineaire afbeelding zodat $T^2 = 0$, dan is er een basis van $V$ zodat de matrix van $T$ t.o.v. deze basis de vorm $\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ heeft.

**Vectorruimte-isomorfismen, algebra's.**

**13.** Laat $V = \mathcal{M}(n \times n, K)$. Voor $A \in V$ definiëren we de afbeelding $\psi_A : V \to V$ gegeven door $\psi_A(X) = [A, X]$ waarbij $[A, X] = AX - XA$ de *commutator* van $A$ en $X$ is.

a. Ga na dat $\psi_A$ een lineaire afbeelding is.

b. Laat $n = 2, K = \mathbf{C}$ en $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Geef de matrix van $\psi_J$ t.o.v. een zelfgekozen basis in $V$ en bepaal de rang van $\psi_J$.

c. Ga na of er een $A \in V$ bestaat zodanig dat $\psi_A$ een vectorruimte-isomorfisme is

d. Ga na dat de afbeeldingen $\psi_A$ voor $A \in V$ een lineaire deelruimte van $\mathcal{L}(V)$ vormen. Beschouw nu de afbeelding $T : V \to \mathcal{L}(V)$ gegeven door $T(A) = \psi_A$. Toon aan dat $T$ lineair is. Is $T$ surjectief? Is $T$ injectief?

**14.** Laat $V = \mathcal{M}(n \times n, K)$. Zij $A$ een inverteerbare matrix in $V$.

a. Bewijs dat de afbeelding $\phi_A : V \to V$ met $\phi_A(M) = AMA^{-1}$ een vectorruimte-isomorfisme is.

b. Neem $n = 2$ en laat $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Bepaal de matrix van $\phi_A$ t.o.v. de basis $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ van $V$ (waarbij $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$).

De vectorruimte $V$ met de matrixvermenigvuldiging is een algebra. Een vectorruimte-isomorfisme $\phi : W \to W'$ tussen twee algebra's $W, W'$ heet een *algebra-isomorfisme* als tevens $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$ waarbij $\cdot$ de vermenigvuldiging in de algebra's $W$ en $W'$ aangeeft.

c. Ga na dat $\phi_A$ een algebra-isomorfisme is.

**15.** Laat zien dat de verzameling van $n \times n$-bovendriehoeksmatrices, resp. stricte bovendriehoeksmatrices met de gewone matrixoptelling en -vermenigvuldiging algebra's zijn.

**Basistransformaties, directe som en projectie.**

**16**a. Bepaal de standaardmatrix van een loodrechte (of orthogonale) spiegeling in de $x_1$-as in $\mathbf{R}^2$.

b. Zij $\ell$ de lijn met vergelijking $x_2 = -2x_1$ in $\mathbf{R}^2$. Bepaal m.b.v. basistransformatiematrices en het resultaat van (a) de standaardmatrix van loodrechte spiegeling in $\ell$.

c. $P : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ is de projectie op de lijn $x_1 - x_2 = 0$ langs de lijn $x_1 + 2x_2 = 0$. Bepaal de standaardmatrix van $P$.

**17.** Beschouw de vectorruimte $V = \mathbf{R}^3$ met lineaire deelruimten $U = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $W = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 : x_1 - x_3 = 0\}$. $P : V \to V$ is de projectie op $W$ langs $U$.

a. Toon aan dat $V = U \oplus W$.

b. Wat is de rang van $P$?

c. Bepaal de standaardmatrix van $P$.

**18**a. Beschouw de vectorruimte $K^n$ voor $n \geq 2$ ($K = \mathbf{R}$ of $\mathbf{C}$). $P : K^n \to K^n$ wordt gegeven door $P(x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n) = (0, 0, x_3, \ldots, x_n)$. Toon aan dat $P$ een projectie is. (N.B. Projecties zijn lineaire afbeeldingen, dus laat ook zien dat $P$ lineair is!)

b. Beschouw de vectorruimte $C = C([-1, 1], K)$ van $K$-waardige continue functies op $[-1, 1]$. Toon aan dat de afbeelding $P : C \to C$ gegeven door $Pf(x) = (f(x) + f(-x))/2$ een projectie is.

**19.** Laat $V = P_n(\mathbf{C})$ de vectorruimte van polynomen $p(X) = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0$ van graad hoogstens $n$ zijn met complexe coëfficiënten $a_0, \ldots, a_n$ en met de gebruikelijke optelling en vermenigvuldiging. $U = \{p \in V : p(1) = p'(1) = 0\}$ en $W = \text{span}\{1, X\}$.

a. Toon aan dat $U$ een lineaire deelruimte is van $V$.

b. Bewijs aan dat $\{(X - 1)^2, (X - 1)^3, \ldots, (X - 1)^n\}$ een basis is van $U$.

c. Bewijs dat $P_n = U \oplus W$.

$\pi : P_n \to P_n$ is de lineaire afbeelding gegeven door $\pi(p)(X) = p(1) + p'(1)(X - 1)$.

d. Bepaal de matrix van $\pi$ t.o.v. de basis $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$.

e. Leg uit dat $\pi$ de projectie op $W$ langs $U$ is (m.a.w. $\pi$ is de projectie op de tweede component van de directe som in (c)).

**20.** Beschouw de vectorruimte van reële $n \times n$-matrices $V = \mathcal{M}(n \times n, \mathbf{R})$. De afbeeldingen $S : V \to V$ en $A : V \to V$ gegeven door $S(X) = \frac{1}{2}(X + X^T)$ en $A(X) = \frac{1}{2}(X - X^T)$ zijn lineaire afbeeldingen (ga dit na).

a. Bepaal de deelruimten $\ker(S)$ en $\ker(A)$ en geef de dimensies. Laat zien dat
$V = \ker(S) \oplus \ker(A)$.

b. Ga na dat $A$ en $S$ projecties zijn, dat $A + S = id_V$ en bepaal $\text{im}(A)$ en $\text{im}(S)$.

**21.** Laat $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ met (standaard-inproduct) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1$. Bewijs dat de afbeelding $P : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ gegeven door $P(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}$ een projectie is. Bepaal $\ker(P)$ en $\text{im}(P)$.

**22.** Laat $V = \mathcal{M}(n \times n, \mathbf{R})$. $\text{Sym}_0^n(\mathbf{R})$ is de deelverzameling van symmetrische $n \times n$-matrices met spoor nul (het spoor van een $n \times n$-matrix $A = (a_{ij})$ is de som van de elementen op de hoofddiagonaal $\sum_{i=1}^n a_{ii}$), $\text{Ant}^n(\mathbf{R})$ is de lineaire deelruimte van antisymmetrische $n \times n$-matrices en $E = \text{span}\{I_n\}$.

a. Laat zien dat $E$, $\text{Ant}^n(\mathbf{R})$ en $\text{Sym}_0^n(\mathbf{R})$ lineaire deelruimten van $V$ zijn.

b. Bewijs dat $V = \text{Sym}_0^n(\mathbf{R}) \oplus \text{Ant}^n(\mathbf{R}) \oplus E$.

c. Bepaal een uitdrukking voor de projecties op de afzonderlijke componenten van de directe som in (b).

**23.** Zij $V$ een vectorruimte. Een lineaire afbeelding $S : V \to V$ heet een *spiegeling* als $V = U \oplus W$ voor zekere lineaire deelruimten $U, W$ van $V$ en $S(u) = u$ voor $u \in U$, $S(w) = -w$ voor $w \in W$.

a. Toon aan: $S$ is een spiegeling dan en slechts dan als $\frac{1}{2}(S + id_V)$ een projectie is.

b. Toon aan: $S$ is een spiegeling dan en slechts dan als $S^2 = id_V$.

**Quotiëntruimten.**

**24.** Ga na dat gelijkvormigheid van matrices een equivalentierelatie op $V = \mathcal{M}(n \times n, K)$ is.

**25.** Laat $V$ een vectorruimte en $W$ een lineaire deelruimte zijn. Bewijs dat de afbeelding $Q : V \to V/W$ gegeven door $Q(v) = \bar{v}$ lineair is. Ga na dat $Q$ surjectief is en bepaal $\ker(Q)$.

**26.** Zij $V = P(\mathbf{C})$ de vectorruimte van polynomen met complexe coëfficiënten. Zij verder $q(X) = X^6 - X$. $W$ is de lineaire deelruimte van polynomen $p(X)$ in $V$ die *deelbaar* zijn door $q(X)$, m.a.w. te schrijven zijn in de vorm $p(X) = q(X)r(X)$ met $r(X)$ een polynoom in $V$.

**a.** Geef een basis van $W$ aan.

**b.** Wat is de dimensie van de quotiëntruimte $V/W$? Geef ook een basis voor $V/W$ aan.

**c.** Ga na of het stelsel polynomen

$$\{X - 1, X^2 - X, X^3 - X^2, X^4 - X^3, X^5 - X^4, X^6 - X^5\}$$

(al dan niet) lineair onafhankelijk is modulo $W$.

De lineaire afbeelding $T : V \to V$ is gegeven door $T(p)(X) = X^3 p(X)$.

**d.** Ga na dat $T$ de lineaire deelruimte $W$ invariant laat, d.w.z. $T(W) \subset W$.

**e.** Geef de matrix aan van de quotiëntafbeelding $T : V/W \to V/W$ t.o.v. de in onderdeel b gekozen basis.

**27**a. Laat $W = \text{span}\{(1, 2, 0)\} \in \mathbf{R}^3$. Is het stelsel $\{e_1, e_2\}$ lineair onafhankelijk modulo $W$? En $\{e_1, e_3\}$?

b. Laat $H \in \mathbf{C}^4$ de lineaire deelruimte zijn gegeven door $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ en $x_1 - x_4 = 0$. Geef een basis aan voor $\mathbf{C}^4/H$. Is het stelsel $\{e_2, e_3\}$ lineair onafhankelijk modulo $H$? En $\{e_1, e_4\}$? En $\{(1, 2, 0, -1), (0, 1, 1, 2)\}$?

c. Laat $V = \mathcal{M}(3 \times 3, \mathbf{C})$ en laat $A, S : V \to V$ als in opgave 20 zijn. Ga na of het stelsel matrices $\{I_3, E_{12} + E_{23}, E_{21} + E_{32}\}$ (waarbij $I_3$ de eenheidsmatrix is en $E_{ij}$ de elementaire matrices (vergelijk opgave 14)) lineair onafhankelijk is modulo $\ker(S)$ en modulo $\ker(A)$.

**28.** Bepaal in de volgende gevallen de quotiëntafbeelding $\bar{T} : V/W \to V/W$ (geef de matrix aan t.o.v. een geschikte basis of geef de beelden van een stelsel basisvectoren):

i. $V = \mathbf{C}^2$, $T : V \to V$ gegeven door $T(x, y) = (x, 2y)$; $W = \text{span}\{e_1\}$, resp. $\text{span}\{e_2\}$.

ii. $V = \mathbf{C}^2$, $T(x, y) = (x + 2y, y)$, $W = \text{span}\{e_1\}$.

**Varia.**

**29**a. Beschrijf de vectorruimte $\mathbf{R}^{\otimes n}$.

b. Laat $V$ een vectorruimte over $K$ zijn. Toon aan dat $V$ en $V \otimes K$ isomorfe vectorruimten zijn.

c. Laat zien dat $\mathbf{R}^n \otimes \mathbf{R}^m$ isomorf is met een vectorruimte $\mathbf{R}^p$ voor zekere $p$ en bepaal $p$.

d. Laat $V$ en $W$ eindig-dimensionale vectorruimten zijn. Bewijs dat $V \otimes W$ isomorf is met de vectorruimte $\mathcal{L}(V, W)$ van lineaire afbeeldingen van $V$ naar $W$. Kies bases van $V$ en $W$ en geef expliciet een isomorfisme aan (gebruik zo nodig matrices). (Opmerking: het isomorfisme is afhankelijk van de keuze van de bases en is niet-kanoniek, zie ook hoofdstuk V).

**30.** $V$ is een (reële of complexe) vectorruimte van dimensie 2. We kiezen een basis $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ van $V$.

a. Wat is $\dim(V \otimes V)$?

b. Geef een vector in $V \otimes V$ aan die niet te schrijven is als een tensorproduct $v \otimes v'$ (met $v, v' \in V$).

Zij $w \in V$. Beschouw de afbeelding $T : V \to V \otimes V$ gedefinieerd door $T(v) = v \otimes w$.

c. Toon aan dat $T$ lineair is. Is $T$ injectief? Is $T$ surjectief?

**31.** Laat $U \subset \mathbf{C}^3$ een tweedimensionale (complexe) lineaire deelruimte zijn.

a. Laat zien dat $U \cap \mathbf{R}^3 \neq \{0\}$.

b. Is het mogelijk dat $\mathbf{R}^3 \subset U$?

**32.** Zij $V$ een vectorruimte. Voor $a \in V$ is de *translatie over* $a$ gegeven door $T_a(v) = v + a$ voor $v \in V$.

a. Ga na dat $T_a$ niet-lineair is voor $a \neq 0_V$.

b. Zij $S : V \to V$ een lineaire afbeelding. Toon aan dat er voor elke $a$ precies één $b \in V$ is zodat $T_b S T_a$ lineair is en bepaal $b$.

**33.** Zij $V$ een vectorruimte en $U$ een lineaire deelruimte van $V$. Voor $a \in V$ is de *getransleerde* $U + a$ gedefinieerd als de verzameling $\{v \in V : v = u + a \text{ voor } u \in U\}$. Merk op dat de getransleerde van een lineaire deelruimte i.h.a. geen lineaire deelruimte is (waarom niet?). Lineaire deelruimten van een vectorruimte samen met hun getransleerden noemen we *affiene deelruimten.*

Laat $U, W$ lineaire deelruimten van $V$ zijn zodanig dat $V = U \oplus W$ en laat $a, b \in V$. Bewijs dat de doorsnede van de affiene deelruimten $U + a$ en $W + b$ precies één element bevat.

**34.** Laten $x_1, \ldots, x_n$ verschillende reële getallen zijn. Zij $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ en laat $W$ de vectorruimte zijn van alle reële functies $f : S \to \mathbf{R}$, met puntsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging.

a. Laat zien dat $W$ $n$-dimensionaal is.

Zij $P_{n-1}$ de vectorruimte van alle polynomen $p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$ van graad hoogstens $n-1$ met reële coëfficiënten $a_j$ en met puntsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging. Definieer de (restrictie)afbeelding Res: $P_{n-1} \to W$ door

$$(\mathrm{Res}\ p)(x_k) = p(x_k) \qquad \text{voor } k = 1, \ldots, n.$$

b. Laat zien dat Res een lineaire afbeelding is.

c. Toon aan dat Ker Res $= \{0\}$.

d. Bewijs dat er voor iedere keuze van reële getallen $c_1, \ldots, c_n$ precies één polynoom $p$ van graad hoogstens $n-1$ is, zodanig dat $p(x_k) = c_k$ voor $k = 1, \ldots, n$.

**35.** In deze opgave beschouwen we de vectorruimte $V = P(\mathbf{C})$ van polynomen met complexe coëfficiënten. Laat $x_1, \ldots, x_n$ $n$ verschillende complexe getallen zijn voor zekere $n > 0$. Verder zijn de polynomen $P_1, \ldots, P_n$ gedefinieerd d.m.v. $P_j(x) = \dfrac{(x - x_1) \cdot \ldots (\widehat{x - x_j}) \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_j - x_1) \cdot \ldots (\widehat{x_j - x_j}) \ldots \cdot (x_j - x_n)}$, waarbij het dakje aangeeft dat de betreffende termen worden weggelaten.

Beschouw de afbeelding $P : V \to V$ gegeven door

$$P(g) = \sum_{j=1}^{n} g(x_j) P_j.$$

a. Laat zien dat $P$ een projectie is.

b. Beschrijf de lineaire deelruimten $\ker(P)$ en $\mathrm{im}(P)$ van $V$. Geef tevens een basis aan van beide deelruimten.

## II. Determinant en spoor.

**1.** Bereken de volgende waarden van het Levi-Civitasymbool:

$\epsilon_{21}$, $\epsilon_{231}$, $\epsilon_{4321}$, $\epsilon_{3142}$.

**2.** Bij een permutatie $p$ van $n$ elementen definiëren we de bijbehorende permutatiematrix $P$ via $P_{ij} = \delta_{i,p(j)}$.

a. Laat zien dat als $P$ en $Q$ de permutatiematrices bij permutaties $p$ en $q$ zijn, dan is $PQ$ de permutatiematrix bij de permutatie $pq$.

b. Ga na dat de determinant van een permutatiematrix $P$ gelijk is aan het teken $\sigma(p)$ van de bijbehorende permutatie $p$.

**3.** Bereken de determinant van de matrix $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 0 & 1 \\ 0 & 2i & -1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**4.** Gegeven is de $n \times n$-matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Bewijs dat $\det(A) = 1$.

**5.** Laat $A_n$ de $n \times n$-matrix zijn gegeven door $(A_n)_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{als } i = j \\ -1 & \text{als } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{als } |i-j| \geq 2 \end{cases}$

en laat $D_n = \det(A_n)$.

a. Bewijs dat $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$ voor $n \geq 3$.

b. Bewijs m.b.v. volledige inductie dat $D_n = n + 1$.

**6.** Bewijs dat voor $a_1, a_2 \dots, a_n \in \mathbf{R}$ geldt dat

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 \dots a_n \left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right).$$

**7.** Zij $A = (a_{ij})$ een antisymmetrische $n \times n$-matrix, d.w.z $A^T = -A$.

a. Bewijs dat $\det(A) = 0$ als $n$ oneven is.

In de rest van de opgave nemen we aan dat $n$ even is. Beschouw de $n \times n$-matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

waarbij $a_1, \dots, a_{n-1}$ complexe getallen zijn.

b. Bewijs dat $\det(A) = (a_1 a_3 \dots a_{n-1})^2$.

Laat nu $n = 4$.

c. Bewijs dat $\det(A)$ het kwadraat is van een polynoom in de coëfficiënten van $A$.

*Opmerking:* (b) en (c) zijn speciale gevallen van een algemeen resultaat: als $A = (a_{ij})$ een antisymmetrische $n \times n$-matrix is en $n$ is even, dan is er een polynoom (genoteerd als $\mathrm{Pf}(A)$) in de coëfficiënten $a_{ij}$ van $A$ zodanig dat $(\mathrm{Pf}(A))^2 = \det(A)$. $\mathrm{Pf}(A)$ heet de *Pfaffiaan* van $A$. (Dit resultaat kan (onder meer) worden bewezen door tegelijkertijd links en rechts rijen en kolommen te vegen om de vorm in (b) te verkrijgen en te gebruiken dat $\det(U^T A U) = \det(A)$ als $\det(U) = 1$.)

**8**a. Bewijs dat

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a+ib-c-id)(a-b+c-d)(a-ib-c+id).$$

Een dergelijk type determinant heet een *circulant* en wordt genoteerd als $C(a,b,c,d)$.

b. Formuleer en bewijs een soortgelijke identiteit voor circulanten $C(a_1, \dots a_n)$ van orde $n$.

c. Een circulant van orde $n$ wordt soms ook gedefinieerd als $C'(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix}$.

Wat is het verband tussen $C(a_1, \dots, a_n)$ en $C'(a_1, \dots, a_n)$?

**9.** Bewijs m.b.v. de Wronskiaan dat het stelsel functies $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ lineair onafhankelijk is in de vectorruimte $C([a,b])$.

**10**a. Laat $a_1, \ldots, a_n$ verschillende reële of complexe getallen zijn. Bewijs dat de functies $e^{a_1 x}, \ldots, e^{a_n x}$ lineair onafhankelijk zijn in de vectorruimte $C([a,b])$ van continue (reële of complexe) functies op het interval $[a,b]$ $(a < b)$.

b. Bewijs dat het stelsel functies $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ lineair onafhankelijk in $C([a,b])$ is.

**11.** Laat $M$ een $n \times n$-matrix zijn van de vorm $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$. Hierbij zijn $A$ en $B$ vierkante matrices. Toon aan dat $\det(M) = \det(A)\det(B)$. Druk $M^{-1}$ uit in termen van $A, B, C$ in het geval dat $A$ en $B$ inverteerbaar zijn.

**12.** Zij $A = (a_{ij})$ een $n \times n$-matrix. Laat $\tilde{A} = (A_{ij})$ de matrix van cofactoren van $A$ zijn. Toon aan dat $\det(\tilde{A}) = (\det(A))^{n-1}$.

**13.** (twee formules voor uitproducten.) In deze opgave bewijzen we de volgende twee identiteiten in $\mathbf{R}^3$:

i. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c})(\mathbf{b}, \mathbf{d}) - (\mathbf{a}, \mathbf{d})(\mathbf{b}, \mathbf{c})$.

ii. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a}, \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{a}$.

a. Laat $A, B$ de $3 \times 3$-matrices gegeven door $A = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d})$ en $B = (\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ zijn. Toon aan dat $\det(A) = \det(B) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d})$.

b. Bewijs formule (i) door $\det A^T B$ op twee manieren te berekenen: (i) m.b.v. (a) en (ii.) door de matrix $A^T B$ uit te schrijven.

c. Leid formule (ii) uit (i) af. Gebruik dat $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y} \times \mathbf{z})$ voor $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^3$ (vergelijk de vorige opgave).

**14.** Laat $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_\ell$ vectoren in $\mathbf{R}^n$ zijn. $A$ is de $n \times k$-matrix met kolomvectoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ (we noteren dit als $A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ en $B = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_\ell)$.

a. Toon aan dat $(A^T B) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_\ell \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_\ell \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{b}_\ell \end{pmatrix}$.

b. Laat $\mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_n$ een orthogonaal stelsel vectoren in $\mathbf{R}^n$ zijn (dus $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = 0$ als $i \neq j$). Bewijs dat $|\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_n)| = \|\mathbf{a}_1\| \|\mathbf{a}_2\| \ldots \|\mathbf{a}_n\|$ waarbij $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$.

c. Bewijs m.b.v. (a) dat $\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}$.

**15.** (een generalisatie van het uitwendig product.)

a. Laat $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1} \in \mathbf{R}^n$ lineair onafhankelijke vectoren zijn. Bewijs dat er een unieke vector $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ bestaat zodat $(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = \det(\mathbf{x}, \mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_{n-1})$ voor alle $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ (merk op dat de afbeelding $\mathbf{x} \to \det(\mathbf{x}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1})$ een lineaire afbeelding is van $\mathbf{R}^n$ naar $\mathbf{R}$). In het geval dat $n = 3$ is $\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$. We noteren in het algemene geval $\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \ldots \times \mathbf{a}_{n-1}$.

b. Bereken $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$ in $\mathbf{R}^4$ ($\mathbf{e}_i$ is de $i$-de standaardbasisvector ).

c. Bereken in $\mathbf{R}^4$ de vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ voor $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d. Laat $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ een lineair onafhankelijk stelsel vectoren in $\mathbf{R}^n$ zijn. Bewijs dat voor het volume van het $n-1$-blok opgespannen door $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ geldt dat $V(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}) = \|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \ldots \times \mathbf{a}_{n-1}\|$. (Aanwijzing: laat $\mathbf{a}_n$ een vector zijn die orthogonaal is met $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ en beschouw $V(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$.)

e. Bereken m.b.v. (d) het volume van het 3-blok van onderdeel c.

## III. Spectraaltheorie van complexe endomorfismen.

**1.** $A$ is de $5\times5$-permutatiematrix $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_3)$, waarbij $\mathbf{e}_i$ staat voor de $i$-de standaardbasisvector. Bepaal de eigenwaarden van $A$. Is $A$ diagonalizeerbaar?

**2.** $A_n$ is de $n\times n$-matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, m.a.w. $A_{ij} = 1$ als $j-i = 0, j-i = 1$ of $i = n, j = 1$.
Bepaal de eigenwaarden van $A$ en de bijbehorende eigenvectoren.

**3.** $B_n$ is de $n \times n$-matrix $\begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Toon aan dat $(-1)^n \chi_{B_n}(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \ldots - a_1 X - a_0$.

b. Laat zien dat alle eigenwaarden van $B_n$ meetkundige multipliciteit 1 hebben.

**4.** Zij $A$ een $n \times n$-matrix. Toon aan dat de eigenwaarden van $A$ en $A^T$ dezelfde meetkundige en algebraïsche multipliciteit hebben.

**5**. $A$ en $B$ zijn $n \times n$-matrices, $B$ inverteerbaar.

a. Bewijs dat $AB$ en $BA$ dezelfde eigenwaarden hebben met dezelfde (algebraïsche) multipliciteiten. Gebruik een continuïteitsargument om te laten zien dat dit resultaat in feite geldt voor alle $n \times n$-matrices $A$ en $B$.

b. Hebben de eigenwaarden van $AB$ en $BA$ ook altijd dezelfde meetkundige multipliciteiten?

**6**a. Bewijs: een $n \times n$-matrix $A$ is nilpotent dan en slechts dan als $A$ louter (complexe) eigenwaarden nul heeft.

b. Zij $V$ een vectorruimte en $N : V \to V$ een nilpotente afbeelding. Bewijs dat $id_V - N$ inverteerbaar is ($id_V$ is de identieke afbeelding op $V$) en schrijf de inverse als een polynoom in $N$.

**7.** (de Jordan-normaalvorm.) Zij $V$ een vectorruimte en $T :\ V \to V$ een lineaire afbeelding.

a. Veronderstel dat er een $a \in V$ is zo, dat $T^k a \neq 0,\ T^{k+1}a = 0$. Hier is $k$ een positief geheel getal. Bewijs dat $a,\ Ta, \cdots, T^k a$ lineair onafhankelijk zijn.
(Aanwijzing: gebruik volledige inductie.)

b. Laat, als aan de voorwaarden van (a) voldaan is, $W = \text{span}\{a,\ Ta, \cdots, T^k a\}$. Bewijs dat $T(W) \subset W$ en laat zien dat er een basis van $W$ bestaat met de eigenschap dat de matrix van $T|_W$ t.o.v. die basis bovendriehoeksvorm heeft, met nullen op de diagonaal, enen op de eerste boven-nevendiagonaal en verder nullen.

c. Zij nu $\dim(V) = n$ en $T : V \to V$ een lineaire afbeelding met $T^{n-1} \neq 0$ en $T^k = 0$ voor zekere $k \geq n$. Bewijs dat er een basis bestaat zodat de matrix van $T$ t.o.v. die basis in bovendriehoeksvorm geschreven kan worden, met nullen in de diagonaal, enen in de eerste boven-nevendiagonaal en nullen verder. (Zo'n basis heet een Jordanbasis van $T$.)

**8**a. Zij $A$ een $n \times n$-matrix met verschillende eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Toon aan dat $(A - \lambda_1 I) \cdot \ldots \cdot (A - \lambda_n I) = O$, m.a.w. $\chi_A(A) = O$. (Aanwijzing: laat zien dat $\chi_A(A)\mathbf{f}_i = 0$ voor $\mathbf{f}_i$ een eigenvector van $A$.)

b. $J$ is de $n \times n$-matrix $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a \end{pmatrix}$ voor zekere $a \in \mathbf{C}$. Bepaal het karakteristieke polynoom $\chi_J$ van $J$ en laat zien dat $\chi_J(J) = O$.

**9**. Bepaal bij de volgende matrices: a. de eigenvectoren, b. de (gegeneraliseerde) eigenruimten, c. een Jordan-normaalvorm. d. Het minmumpolynoom.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**10**. Laat $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal een basis van gegeneraliseerde eigenvectoren van $A$.

b. Geef een Jordan-normaalvorm van $A$.

c. Druk $A^{-1}$ als polynoom in $A$ uit.

d. Schrijf het diagonaliseerbare deel $D$ en het nilpotente deel $N$ van $A$ als een polynoom in $A$.

**11**. Zij $A$ een $m \times n$-matrix met rang 1.

a. Bewijs dat $A = \mathbf{a}\mathbf{b}^T$ voor zekere (kolom)vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$.

b. Laat nu $m = n$. Bewijs dat $\mathrm{tr}(A) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (het standaard-inproduct) en dat $A^2 - \mathrm{tr}(A)A = O$. Bepaal nu het minimumpolynoom $m_A$ van $A$.

c. Bepaal het karakteristieke polynoom $\chi_A$ van $A$ en toon aan dat $m_A$ een deler is van $\chi_A$.

d. Laat $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -10 \\ 3 & -6 & 15 \end{pmatrix}$. Bereken $B^{100}$.

**12**. Ga na of de volgende matrices gelijkvormig zijn:

a. $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 & 14 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

b. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 \\ -2 & 5 & 12 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**13**. Zij $A$ een $n \times n$-matrix. Laat $B$ de matrix zijn die uit $A$ ontstaat door tegelijkertijd de rijen en kolommen te permuteren (m.a.w. er is een permutatie $p \in S_n$ zodanig dat $A_{p(i)p(j)} = B_{ij}$).

Bewijs dat $A$ en $B$ gelijkvormige matrices zijn.

**14**. (continue afhankelijkheid van de eigenwaarden.) Laat $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ verschillende complexe getallen en $D$ de diagonaalmatrix $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ zijn. Zij $\epsilon > 0$. Zij verder $E$ een $n \times n$-matrix met elementen $E_{ij}$ met $|E_{ij}| < \epsilon$.

a. Bewijs: voor $\epsilon$ klein genoeg heeft de matrix $D + E$ $n$ verschillende eigenwaarden $\mu_1, \ldots, \mu_n$ zo, dat $|\mu_j - \lambda_j| < n\epsilon$ voor $j = 1, \ldots, n$. (Aanwijzing: gebruik de stelling van Gershgorin).

b. Zij $A$ een complexe $n \times n$-matrix met n verschillende eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Bewijs: voor elke $\epsilon > 0$ klein genoeg geldt: er is een $\delta > 0$ zo, dat als $E$ een matrix is waarbij voor de elementen $E_{ij}$ geldt dat $|E_{ij}| < \delta$, dan heeft de matrix $A + E$ $n$ verschillende eigenwaarden $\mu_1, \ldots, \mu_n$ met $|\mu_j - \lambda_j| < \epsilon$ voor $j = 1, \ldots, n$. (Aanwijzing: diagonaliseer $A$ en pas (a) toe).

**15**. Laat zien dat de ongelijkheid van Gershgorin scherp is voor de matrices van de vorm $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbf{C})$.

## IV. Vectorruimten met inwendig product.

**1.** Laat zien dat de volgende vormen (euclidische resp. hermitese) inwendige producten zijn op de vectorruimte $V$:

a. $V = \mathbf{R}^n$ en $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (A\mathbf{x})^T A\mathbf{y}$, waarbij $A$ een willekeurige reële inverteerbare $n \times n$-matrix is.

b. $V = \mathcal{M}(m \times n, \mathbf{R})$ en $(A, B) = \operatorname{tr}(A^T B)$.

c. $V = \mathcal{M}(m \times n, \mathbf{C})$ en $(A, B) = \operatorname{tr}(A^* B)$. Hierbij is $A^*$ de complex geconjugeerde van $A^T$.

d. $V = C([a,b], \mathbf{C})$ (de vectorruimte van complexwaardige continue functies op $[a,b]$) met $a < b$ en $(f,g) = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) w(x) dx$ waarbij $w$ een continue reële functie is op $[a,b]$ zodanig dat $w(x) > 0$ voor $x \in (a,b)$.

e. $V = \ell_\infty(\mathbf{R})$ is de vectorruimte van begrensde rijtjes $(x_1, x_2, \ldots)$ (met $x_i \in \mathbf{R}$) met de componentsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging en $(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n y_n}{n^2}$.

**2.** $V$ is de vectorruimte $\mathbf{C}^2$ met inwendig product $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{x_1} y_1 + 2\overline{x_2} y_2 - \overline{x_1} y_2 - \overline{x_2} y_1$.

a. Toon aan dat ( , ) inderdaad een hermites inproduct is.

b. Laat $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{e}_2$ de standaard-basisvectoren in $V$ zijn. Bereken (t.a.v. het gegeven inproduct) $\|\mathbf{e}_1\|$, $\|\mathbf{e}_2\|$ en $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

c. Bepaal een orthonormale basis van $V$.

**3.** Beschouw de sesquilineaire vorm $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2\overline{x_1} y_1 + 3\overline{x_2} y_2 + i\,\overline{x_1} y_2 - i\,\overline{x_2} y_1$.

a. Bepaal een hermitese matrix $C$ zodanig dat $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^* C \mathbf{y}$. Ga na dat $B(\ ,\ )$ een inwendig product is.

b. Bepaal een basis van $\mathbf{C}^2$ die orthonormaal is t.a.v. het inproduct $B(\ ,\ )$.

**4.** Op de vectorruimte van polynomen met complexe coëfficiënten $C = P(\mathbf{C})$ vormt $(f,g) = \int_{-1}^{1} \overline{f(x)} g(x) dx$ een (hermites) inwendig product.

a. Door het Gram-Schmidt-procédé toe te passen op het stelsel $\{1, X, X^2, \ldots\}$ krijgen we een orthonormale basis $\{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$. Bepaal $p_i$ voor $i = 0, 1, 2$.

b. Beargumenteer dat de graad van $p_n$ precies $n$ is. (*Opmerking:* De polynomen $p_n / p_n(1)$ heten de *Legendrepolynomen* $P_n$. De $P_n$ zijn dus zo genormeerd dat $P_n(1) = 1$. (Dit is goed gedefinieerd is omdat er kan worden aangetoond dat $p_n(1) \neq 0$ voor alle $n$.) In het algemeen noemen we een stelsel polynomen $\{p_0, p_1, \ldots\}$ dat orthogonaal is t.a.v. een inproduct en zodanig dat graad$(p_n) = n$ *orthogonale polynomen*.)

**5**. $V = C([0, 2\pi])$ is de vectorruimte van complexe continue functies op het interval $[a, b] \subset \mathbf{R}$.

a. Bewijs dat $\{\cos nx, \sin nx, 1\}_{n=1}^{\infty}$ een orthogonaal stelsel is op $V$. Bepaal ook een orthonormaal stelsel.

b. Beantwoord dezelfde vraag voor het stelsel $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

**6**a. Bewijs m.b.v. de ongelijkheid van Schwarz de driehoeksongelijkheid voor vectoren in een vectorruimte met hermites inproduct: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (waarbij $\|x\|^2 = (x, x)$).

b. Bewijs de *stelling van Pythagoras*: $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$ dan en slechts dan als Re $(x, y) = 0$.

c. Bewijs de volgende ongelijkheid voor $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$:

$$|a_1 + \ldots + a_n|^2 \leq n(|a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2).$$

**7**. Zij $T_{\mathbf{a}} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ voor $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$ gegeven door $T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$.

a. Laat zien dat $T_{\mathbf{a}}^* = -T_{\mathbf{a}}$.

b. Neem aan dat $\|\mathbf{a}\| = 1$. Laat zien dat $T_{\mathbf{a}}^2(\mathbf{x}) = -\mathbf{x} + (\mathbf{a}, \mathbf{x})\mathbf{a}$ en dat $T_{\mathbf{a}}^3 = -T_{\mathbf{a}}$.

c. Beschrijf in het geval dat $\|\mathbf{a}\| = 1$ de afbeelding $T_{\mathbf{a}}$ meetkundig.

**8**. Zij $V$ een vectorruimte met inwendig product $(\ ,\ )$, en laat $T_{ab} : V \to V$ gegeven zijn door $T_{ab}(x) = (a, x)b$ waarbij $a, b \in V$. Bepaal de geadjungeerde $T_{ab}^*$.

**9**. Zij $V = C([-1, 1])$ de vectorruimte van complexwaardige continue functies op het interval $[-1, 1]$ met hermites inwendig product $< f, g >:= \int_{-1}^{1} \overline{f(x)} g(x) dx$. Laat $T : V \to V$ de lineaire afbeelding $T(f) = f(0)$ zijn (het beeld moet dus worden opgevat als de constante functie $f(0)$). Toon aan dat $T$ geen geadjungeerde heeft.

**10**. Beschouw de lineaire afbeelding $P : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ gegeven door $P(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - (\mathbf{a}, \mathbf{x})\mathbf{b}$, waarbij $\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{C}$ en $(\ ,\ )$ staat voor het standaard-hermites inproduct op $\mathbf{C}^n$. Toon aan dat $P$ een orthogonale projectie is dan en slechts dan als $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ of $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ of $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ lineair afhankelijk zijn en $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1$. Wat is de kern en het beeld van $P$? (Vergelijk ook opgave 18 van hoofdstuk I.)

**11**. Beschouw op de vectorruimte $\mathcal{M}(n \times n, \mathbf{C})$ van complexe $n \times n$-matrices met inproduct $(A, B) = \mathrm{tr}(A^* B)$ de afbeelding $P(X) = \frac{1}{2}(X^* + X)$. Ga na of $P$ een orthogonale projectie is.

**12**. De lineaire deelruimte $W$ van de vectorruimte $\mathbf{C}^2$ (met het standaard-inproduct) wordt opgespannen door $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$. Bepaal een basis van $W^\perp$ en geef de (standaard)matrix van de orthogonale projectie op $W$.

**13**. Bepaal de standaardmatrix van de orthogonale projectie op de volgende lineaire deelruimten $W$ van $V$:

a. $V = \mathbf{R}^4$. $W = \text{span}\{(2,1,0,1)^T\}$.

b. $V = \mathbf{R}^4$. $W = \text{span}\{(1,1,0,0)^T, (-1,0,1,1)^T\}$.

c. $W$ is het hypervlak $x_1 + x_2 + x_4 = 0$ in $\mathbf{R}^4$.

**14**. In $\mathbf{C}^4$ is $W$ de lineaire deelruimte opgespannen door de vectoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}$.

a. Bepaal een basis van $W^\perp$.

b. Laat $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Schrijf $\mathbf{v}$ als $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^\perp$ met $\mathbf{w} \in W$ en $\mathbf{w}^\perp \in W^\perp$.

**15**. Beschouw de matrix $Q = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 6 & b \\ 6 & a & -3 \\ -2 & 3 & c \end{pmatrix}$.

a. Bepaal $a, b, c$ zo, dat $Q$ een orthogonale matrix is.

b. Toon aan dat $Q$ de matrix is (t.o.v. de standaardbasis) van een rotatie. Bepaal ook de rotatieas en de rotatiehoek.

c. Bewijs, zonder te rekenen, dat er precies vier orthogonale matrices $P$ bestaan met $P^2 = Q$.

**16**. Zij $W$ het vlak in $\mathbf{R}^3$ met vergelijking $x_1 - x_3 = 0$. $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ is de (orthogonale) spiegeling in $W$.

a. Bepaal een orthonormale basis van $W$.

b. Bepaal de matrix van $S$ t.o.v. een geschikte orthonormale basis van $\mathbf{R}^3$.

c. Bepaal de matrix van $S$ t.o.v. de standaardbasis van $\mathbf{R}^3$.

**17.** Zij $\ell = \text{span}\{(1,1,1)\}$.

a. Bepaal een orthonormale basis van $\ell^\perp$.

$R : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ is de rotatie om $\ell$ met rotatiehoek $\pi$. $D : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ is de draaispiegeling met draaiingsas $\ell$ en draaiingshoek $\pi$.

b. Bepaal de matrices van $R$ en $D$ t.o.v. de standaardbasis van $\mathbf{R}^3$.

**18**. $A, B$ zijn twee $3 \times 3$-rotatiematrices met dezelfde rotatiehoek. Bewijs dat $A$ en $B$ orthogonaal gelijkvormige matrices zijn (d.w.z. $A = U^T BU$ voor zekere orthogonale matrix $U$).

**19**a. De matrix $U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a & -i \\ b & c \end{pmatrix}$ is unitair en heeft determinant 1. Bepaal $a, b, c$.

b. Bepaal $a, b \in \mathbf{C}$ en $c > 0$ zodanig dat $V = c\begin{pmatrix} i & a \\ -2 & b \end{pmatrix}$ een unitaire matrix is.

**20**. Definieer de cyclische verschuivingsafbeelding $S : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ door $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T = (x_n, x_1 \ldots, x_{n-1})^T$.

a. Bewijs dat $S$ unitair is.

b. Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van $S$.

c. Verifieer dat de eigenvectoren van $S$ onderling orthogonaal zijn.

**21**. Zij $V$ een unitaire vectorruimte met hermites inproduct $( \ , \ )$. Zij $\mathbf{n} \in V$, $\|\mathbf{n}\| = 1$. Voor $\lambda \in \mathbf{C}$ is de lineaire afbeelding $S_\lambda : V \to V$ gegeven door $S_\lambda(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \lambda(\mathbf{n}, \mathbf{x})\mathbf{n}$.

a. Bepaal de geadjungeerde $S_\lambda^*$.

b. Bepaal de eigenwaarden en eigenruimten van $S_\lambda$. Leg uit dat $S_2$ een (orthogonale) spiegeling voorstelt.

c. Bewijs dat $S_\lambda$ unitair is dan en slechts dan als $2\ \mathrm{Re}\lambda = |\lambda^2|$.

d. Zij $S : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ de (loodrechte) spiegeling in het hypervlak
$V = \ \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Bepaal de standaardmatrix van $S$. (Gebruik onderdeel (b).)

**22**. Zij $V = C([-1, 1], \mathbf{C})$ de vectorruimte van complexe continue functies op het interval $[-1, 1]$. Op $V$ is er een inwendig product gedefinieerd door $(f, g) = \int_{-1}^{1} \overline{f(x)} g(x) dx$. Laat $m \in V$ een functie zijn met waarden op de eenheidscirkel: $|m(x)| = 1$ voor $x \in [-1, 1]$. Bewijs dat de vermenigvuldigingsafbeelding $M : V \to V$ gegeven door $(Mf)(x) = m(x)f(x)$ unitair is.

**23**. Beschouw de afbeelding $R : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ gegeven door $R(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\cos\theta + (\mathbf{n} \times \mathbf{x})\sin\theta + (\mathbf{n}, \mathbf{x})\mathbf{n}(1 - \cos\theta)$. Hierbij is $( \ , \ )$ het standaard-inproduct en $\|\mathbf{n}\| = 1$.

a. Ga na dat $R$ orthogonaal is.

b. Laat zien dat $\mathbf{n}$ een eigenvector is met eigenwaarde 1.

c. Toon aan: als $(\mathbf{y}, \mathbf{n}) = 0$ en $\|\mathbf{y}\| = 1$, dan is $(R\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \cos\theta$.

d. Leg uit dat $R$ een rotatie voorstelt. Wat zijn de draaiingsas en de draaiingshoek?

**24.** Zij $R : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ een orthogonale afbeelding.

Toon aan dat voor $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$ geldt: $R(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \det(R)(R(\mathbf{a}) \times R(\mathbf{b}))$. (Aanwijzing: je kunt gebruiken dat $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$).

**25.** Zij $V = \mathcal{M}(n \times n, \mathbf{C})$ de vectorruimte van complexe $n \times n$-matrices voorzien van het inwendig product $(A, B) = \mathrm{tr}(A^* B)$. Laat $U$ een vaste unitaire $n \times n$-matrix zijn en definieer de lineaire afbeelding $L : V \to V$ door $L(A) = UA$.

a. Laat zien dat $L$ een unitaire afbeelding is.

Laat $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ een orthonormale basis van eigenvectoren van $U$ zijn in $\mathbf{C}^n$. Definieer de matrices $A_{ij}$ voor $i, j = 1, 2, \ldots, n$ d.m.v.

$$A_{ij} = (\mathbf{0} \ldots \mathbf{0}\ \mathbf{a}_j\ \mathbf{0} \ldots \mathbf{0})$$

waarbij $\mathbf{a}_j$ in de $i$-e kolom staat (en de andere kolomvectoren de nulvector zijn).

b. Toon aan dat $A_{ij}$ een eigenvector is van $L$.

c. Toon aan dat de matrices $A_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ een orthonormale basis van eigenvectoren van $L$ vormen.

d. Laat $\chi_U$ en $\chi_L$ de karakteristieke polynomen zijn van $U$ resp. $L$. Leg uit waarom $\chi_L(x) = \chi_U(x)^n$.

**26.** Zij $V$ een vectorruimte. Een bilineaire vorm $B : V \times V \to \mathbf{R}$ heet *gedegenereerd* als er een $v \in V$ is, $v \neq 0$, zodat $B(v, w) = 0$ voor alle $w \in V$. Een bilineaire vorm $B$ op $V$ heet *scheefsymmetrisch* als $B(v, w) = B(w, v)$ voor alle $v, w \in V$. Een bilineaire niet-gedegenereerde scheefsymmetrische vorm noemen we een *symplectische vorm*.

a. Zij $V$ een complexe vectorruimte met een hermites inwendig product $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbf{C}$. Laat zien dat de bilineaire vorm $B : V \times V \to \mathbf{R}$ gedefinieerd door $B(v, w) = \mathrm{Im}\langle v, w\rangle$ een symplectische vorm is op $V$.

In de rest van de opgave is $V = \mathbf{R}^n$.

b. Toon aan dat de bilineaire vorm $B : V \times V \to \mathbf{R}$ symplectisch is dan en slechts dan als $B(v, w) = v^T A w$ (voor $v, w \in V$) waarbij $A$ een inverteerbare, antisymmetrische matrix is.

c. Zij $B$ een symplectische vorm op $V$. Laat zien dat de dimensie $n$ van $V$ even is.

Zij $W$ een lineaire deelruimte. Het *symplectische complement* is $W_B^{\perp} = \{w \in V : B(v, w) = 0 \text{ voor alle } v \in W\}$.

d. Laat zien dat $W_B^{\perp}$ een lineaire deelruimte van $V$ is en dat $\dim(W) + \dim(W_B^{\perp}) = \dim(V)$.

Een lineaire deelruimte $L \subset V$ heet een *Lagrangiaan* (of *maximaal isotroop*) als $L = L_B^{\perp}$.

e. Laat zien dat voor een Lagrangiaan $L \subset V$ geldt dat $\dim(L) = n/2$.

f. Zij $B$ een symplectische vorm op $V$. Bewijs dat $V$ een Lagrangiaan heeft.

## V. De duale van een vectorruimte.

**1.** Zij $V$ een vectorruimte en $f \in V^*$, $f \neq 0$. Laat $b \in V$ zodat $f(b) = 1$ (ga na dat er altijd zo'n $b$ bestaat). Laat $p : V \to V$ gedefinieerd zijn door $p(x) = x - f(x)b$.

Toon aan dat $p$ een projectie is en bepaal $\ker(p)$ en (in het geval dat $V$ eindig-dimensionaal is) $\mathrm{rang}(p)$. (Vergelijk opgave I.18.)

**2.** Bepaal in de volgende gevallen de getransponeerde afbeelding van $T : V \to W$:

a. $V = C([a, b], K)$, $W = K$ met $T(f) = f(c)$, $c \in [a, b]$.

b. $V = W = P(K)$ (de vectorruimte van polynomen met coëfficiënten in het lichaam $K$) met $T(f) = df/dx$.

c. $V = W = \mathbf{R}^n$ gegeven door $T(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}$.

**3.** Laat $V$ een eindig-dimensionale vectorruimte zijn met basis $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$. Laat $T : V \to V$ een inverteerbaar endomorfisme zijn en laat $\mathbf{b}_i = T(\mathbf{a}_i)$ voor $i = 1, \ldots, n$. De duale bases in $V^*$ geven we aan met $\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n\}$, resp. $\{\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n\}$.

Bewijs dat $T'(\mathbf{b}^i) = \mathbf{a}^i$ voor $i = 1, \ldots, n$.

**4.** Laat $V$ een vectorruimte over het lichaam $K$ zijn en $f \in V^*$. Bewijs dat voor de getransponeerde geldt: $f'(k) = k \cdot f$ voor $k \in K$. Hierbij staat $k \in K'$ voor $k \cdot id_K$.

**5.** Laat $U, V, W$ vectorruimten over $K$ en laat $S : W \to U$ en $T, R : V \to W$ lineaire afbeeldingen zijn. Toon aan dat $(ST)' = T'S'$, $(T + R)' = T' + R'$ en als $T$ inverteerbaar is, dan is $T'$ inverteerbaar en $(T^{-1})' = (T')^{-1}$.

**6.** Zij $V = P_n(K)$ de vectorruimte van polynomen (met coëfficiënten in $K$) van graad hoogstens $n$. Laat $x_0, \ldots, x_n \in K$.

a. Ga na dat de afbeeldingen $f_j : V \to K$ gegeven door $f_j(P) = P(x_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ in $V^*$ liggen.

b. Bewijs dat het stelsel $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ een basis van $V^*$ vormt.

c. Bepaal een stelsel polynomen $\{L_0, \ldots, L_n\} \in V$ dat duaal is met $\{f_0, \ldots, f_n\}$ (m.a.w. $f_i(L_j) = \delta_{ij}$; de $L_i$'s heten de *Lagrange-polynomen* behorend bij $x_0, \ldots, x_n$.)

**7.** Zij $V$ een vectorruimte en $W$ een lineaire deelruimte van $V$. De deelverzameling $W^\perp = \{f \in V^* : f(w) = 0\ \forall w \in W\}$ van $V^*$ heet de *annihilator* van $W$.

a. Bewijs dat $W^\perp$ een lineaire deelruimte van $V^*$ is.

Zij $(\ ,\ )$ een inwendig product op $V$. Het orthogonaal complement $W^\perp = \{u \in V : (u, w) = 0\ \forall w \in W\}$ is een lineaire deelruimte van $V$.

b. Bewijs dat voor $w \in V$ geldt: $w$ zit in het orthogonaal complement $W^\perp$ van $W$ dan en slechts dan als $i_w$ in de annihilator van $W$ zit.

**8**. Laat $V = P(K)$ zijn. Laat $f_j \in V^*$ gedefinieerd zijn door $f_j(X^i) = \delta_{ij}$ voor $i, j = 0, 1, 2, \ldots$.

a. Bewijs dat de $f_j$'s een lineair onafhankelijk stelsel vormen.

Laat $g : V \to K$ gegeven zijn door $g(p) = p(1)$.

b. Bewijs dat $g \in V^*$ en dat $g$ lineair onafhankelijk van $f_0, f_1, \ldots$ is.

c. Geef een basis van $\ker(g)$.

d. Toon aan dat $(\ker(g))^\perp = \mathrm{span}\{g\}$.

e. Ga na dat $\mathrm{im}(g') = \mathrm{span}\{g\}$.

f. Bepaal $\ker(g')$.

**9.** In deze opgave bestuderen we een vectorruimte-isomorfisme tussen $V \otimes W$, resp $V^* \otimes W$ en $\mathcal{L}(V, W)$. We nemen $V = \mathbf{C}^2, W = \mathbf{C}^n$.

a. Laat zien dat elke $T \in \mathcal{L}(V, W)$ een lineaire combinatie van de afbeeldingen $T_{ij}$ is waarbij $T_{ij}(\mathbf{e}_k) = \delta_{ik}\mathbf{e}_j$ ($\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, resp. $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ is de standaardbasis in $V$ resp. $W$).

b. Beschouw de lineaire afbeelding $\phi : V \otimes W \to \mathcal{L}(V, W)$ gedefinieerd door $\phi(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}'_j) = T_{ij}$. Ga na dat $\phi$ een vectorruimte-isomorfisme is.

c. Beschouw nu de basis $\{\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\}$ van $V$. Dan is $T_{11} = \phi(\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{e}'_1) + \phi(\mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{e}'_1)$. Ga na dat niet geldt: $\phi(\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{e}'_j)(\mathbf{a}_k) = \delta_{ik}\mathbf{e}'_j$.

d. Laat $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$, resp. $\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2\}$ de duale basis van $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, resp. $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ in $V^*$ zijn. Druk $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2$ uit in $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2$.

e. Definieer het vectorruimte-isomorfisme $\psi : V^* \otimes W \to \mathcal{L}(V, W)$ door $\psi(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}'_j) = T_{ij}$. Ga na dat nu (wel) geldt $\psi(\mathbf{a}^i \otimes \mathbf{e}'_j)(\mathbf{a}_k) = \delta_{ik}\mathbf{e}'_j$.

## VI. Genormeerde vectorruimten.

**1.** Bepaal van de volgende matrices de norm:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**2a.** Zij $V = C([a,b], K)$ de vectorruimte van continue $K$-waardige functies op $[a,b] \subset \mathbf{R}$ $(a < b)$. Laat zien dat $V$ met de sup-norm $\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ een genormeerde vectorruimte is.

b. Beantwoord dezelfde vraag voor $V = \ell_1(K)$, de verzameling rijtjes $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ met $x_i \in K$ en zodanig dat $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$ convergeert en met norm $\|\mathbf{x}\| = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$.

**3.** Zij $V$ een (eindig-dimensionale) complexe vectorruimte met inwendig product $(\ ,\ )$ en $T : V \to V$ een lineaire afbeelding.

a. Toon aan dat voor de Euclidische norm geldt: $\|T\| = \max_{\|x\|=\|y\|=1} |(T(x), y)|$ (waarbij $x, y \in V$).

b. Toon aan, m.b.v. (a), dat $\|T^*\| = \|T\|$.

c. Zij $U : V \to V$ unitair. Bewijs dat $\|U^{-1}TU\| = \|T\|$.

d. Geldt $\|S^{-1}TS\| = \|T\|$ ook voor een willekeurige inverteerbare afbeelding $S : V \to V$?

e. $P : V \to V$ is een orthogonale projectie op een lineaire deelruimte $W$. Neem aan dat $W$ niet de nulruimte is. Bewijs dat $\|P\| = 1$.

**4.** Zij $A$ een willekeurige $n \times n$-matrix. Bewijs dat

$$\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = \max\{|a| : a \text{ is een eigenwaarde van A}\}.$$

**5.** Toon aan dat $I + A + A^2 + A^3 + \ldots$ convergeert als $\|A\| < 1$ en dat de som gelijk is aan $(I - A)^{-1}$.

**6.** Bepaal in de volgende gevallen zo mogelijk $e^A, \cos(A), \sin(A), \log(A)$:

a. $A =$ diag$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

b. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c. $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ voor $\lambda \in \mathbf{C}$.

d. $A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

e. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**7**a. Bewijs: $\left(e^A\right)^T = e^{A^T}$ en $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$.

b. Bewijs dat voor $A, B$ $n \times n$-matrices, $B$ inverteerbaar: $B^{-1}e^A B = e^{B^{-1}AB}$.

**8**a. Zij $N$ een nilpotente matrix. Bewijs dat 1 de enige eigenwaarde van $e^N$ is.

b. Toon aan: de eigenwaarden van de matrix $e^A$ zijn van de vorm $e^a$ waarbij $a$ een eigenwaarde van $A$ is.

**9.** Laat $J$ de matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ zijn. Laat zien dat $e^{\theta J} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
(Gevolg: elke matrix in $SO(2)$ is te schrijven in de vorm $e^L$ met $L^T = -L$.)

**10.** In deze opgave tonen we aan dat elke matrix in $SO(3)$ van de vorm $e^L$ is met $L$ een antisymmetrische matrix.

a. $R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ is de standaardmatrix van rotatie om de $z$-as in $\mathbf{R}^3$. Laat zien dat $R_z(\theta) = e^{\theta J}$ en bepaal $J$.

b. Zij $A \in SO(3)$. Dan is $A$ de standaardmatix van rotatie om een as $\ell$ door de oorsprong. Toon aan dat er een orthogonale matrix $B$ bestaat zodanig dat $A = B^{-1}R_z(\theta)B$ voor zekere $\theta \in \mathbf{R}$. (vergelijk ook opgave IV.16).

c. Gebruik nu opgave V.7 om aan te tonen dat $A = e^L$ met $L^T = -L$.

**11.** In de volgende opgave is $A$ steeds een $n \times n$-matrix.

a. Geef een voorbeeld van een reële matrix $A$ zodanig dat $e^A = I$ en $A \neq O$.

b. Toon aan: $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$.

c. Bewijs dat $\exp(A)$ orthogonaal (resp. unitair) is als $A$ antisymmetrisch (resp. antihermites, d.w.z. $A^* = -A$) is. Geldt het omgekeerde ook?

d. Is elke reële orthogonale matrix te schrijven in de vorm $\exp(A)$ met $A$ een reële matrix?

**12**a. Ga na dat elke spoorloze hermitese $2\times2$-matrix een reële lineaire combinatie $\sigma\cdot\mathbf{a} = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3$ is van de *Pauli-matrices* $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ en $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b. We schrijven $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{n}$ waarbij $\alpha > 0$ en $\|\mathbf{n}\| = \mathbf{1}$. Ga na dat de matrix $\sigma \cdot \mathbf{a}$ te schrijven is in de vorm $\alpha \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

c. Bepaal de eigenwaarden en de eigenvectoren van $\sigma \cdot \mathbf{a}$ (geef een uitdrukking in termen van $\alpha$, $\theta$ en $\phi$).

d. Toon aan dat $e^{i\sigma\cdot\mathbf{a}} = I\cos\alpha + i(\sigma\cdot\mathbf{n})\sin\alpha$ en ga na dat elke matrix $U \in SU(2)$ te schrijven is in de vorm $U = e^{i\sigma\cdot\mathbf{a}}$ voor $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$.

**13.** Beschouw voor $t \in \mathbf{R}$ de matrixwaardige functie $A(t) = (I_n - tB)^{-1}$ voor zekere $n \times n$-matrix $B$. Bepaal $A'(t)$.

**14.** Laat $a, b$ reële getallen zijn met $a < b$. Zij $A(t)$ een op $[a, b]$ differentieerbare ($n \times n$–)matrixfunctie.

a. Neem aan dat $A(t)$ orthogonaal (resp. unitair) is. Bewijs dat $A^T(t)\dfrac{dA}{dt}(t)$ antisymmetrisch (resp. antihermites) is.

b. Bewijs dat $\dfrac{d}{dt}\det(A(t)) = \mathrm{tr}(\dfrac{dA}{dt})(t)$.

**15.** Los de volgende stelsels differentiaalvergelijkingen op:

a. $\begin{cases} x'(t) = & 2y(t) \\ y'(t) = & 2x(t) \end{cases}$.

b. $\begin{cases} x'(t) = & -3x(t) + 4y(t) \\ y'(t) = & -x(t) + y(t) \end{cases}$.

**16.** Voor $A \in \mathcal{M}(n \times n, K)$ is de lineaire afbeelding ad:$\mathcal{M}(n \times n, K) \to \mathcal{L}(\mathcal{M}(n \times n, K))$ gedefinieerd als $\mathrm{ad}(A)(B) = [A, B]$. We gaan aantonen dat $e^A B e^{-A} = e^{\mathrm{ad}(A)}B$.

a. Toon aan dat $\dfrac{d}{dt}e^{tA}Be^{-tA} = e^{tA}[A, B]e^{-tA}$ en dat $\dfrac{d^n}{dt^n}e^{tA}Be^{-tA} = e^{tA}(\mathrm{ad}(A))^n Be^{-tA}$ voor $t \in \mathbf{R}$.

b. Laat zien m.b.v. (a) dat
$$e^{tA}Be^{-tA} = e^{t\cdot\,\mathrm{ad}(A)}B.$$

**17.** Zij $V$ een eindig-dimensionale complexe vectorruimte met inproduct $(\ ,\ )$ en $T : V \to V$ een lineaire afbeelding. $A$ is de matrix $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ van $T$ t.o.v. een orthonormale basis $\mathcal{B}$ van $V$. Bewijs dat $\|T\| = \|A\|$ waarbij de norm de afbeeldings-, resp. matrixnorm is, geïnduceerd door de vectornorm afkomstig van het inproduct op $V$ (m.a.w. $\|T\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1}\|T\mathbf{x}\|$ en analoog voor $A$).

## VII. Normale afbeeldingen.

**1.** Beschouw de lineaire afbeelding $T : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ gegeven door $T(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x})\mathbf{b}$ waarbij $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{C}^n$ met $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. $(\ ,\ )$ is het standaard-hermitese inproduct op $\mathbf{C}^n$.

a. Bepaal de eigenwaarden en de bijbehorende eigenruimten van $T$.

b. Laat zien dat $T$ diagonalizeerbaar is dan en slechts dan als $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$.

c. Bewijs dat $T$ normaal is dan en slechts dan als **a** en **b** lineair afhankelijk zijn.

**2.** Bewijs dat de afbeeldingen $S_\lambda$ van opgave IV.19 voor alle $\lambda \in \mathbf{C}$ normaal zijn.

**3.** Laat $V$ een tweedimensionale unitaire vectorruimte zijn met hermites inproduct $(\ ,\ )$. Beschouw de afbeelding $T : V \to V$ gedefinieerd door $T(x) = (a, x)b + (b, x)a$ waarbij $a, b \in V$ gegeven vectoren zijn.

a. Toon aan dat $T$ een hermitese afbeelding is.

b. Laat nu $\{a, b\}$ een orthonormaal stelsel in $V$ zijn. Bepaal de eigenwaarden en een orthonormale basis van eigenvectoren van $T$.

c. Beantwoord vraag b voor het geval dat $\dim(V) = n > 2$.

**4.** Bewijs dat voor een normale matrix $A$ geldt: $\|A\| = \max\{|a| : a \text{ is een eigenwaarde van A}\}$.

**5.** Bepaal alle normale, nilpotente $n \times n$-matrices.

**6.** Zij $V$ een eindig-dimensionale unitaire vectorruimte. Bewijs dat elke normale projectie een orthogonale projectie is (een normale projectie is een projectie die tegelijkertijd een normale afbeelding is).

**7**a. Bepaal m.b.v. de spectraaldecompositie voor symmetrische matrices een symmetrische $3 \times 3$–matrix $A$ zodanig dat de eigenwaarden van $A$ gelijk zijn aan 1 (met multipliciteit 2) resp. $-1$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ een eigenvector met eigenwaarde -1 is.

b. Geef een uitdrukking voor $A^n$ voor $n$ geheel.

**8.** Zij $A$ een (reële) antisymmetrische $n \times n$-matrix.

a. Toon aan dat alle eigenwaarden van $A$ van de vorm $ia$ met $a$ reëel zijn.

b. Bewijs dat $A$ een eigenwaarde 0 heeft als $n$ oneven is.

**9.** Beschouw de kwadratische vorm $q(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2$.

a. Schrijf $q(\mathbf{x})$ in de vorm $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ met $A = A^T$.

b. Diagonalizeer $q(\mathbf{x})$ en bepaal de signatuur van $q$.

c. Bepaal de spectraaldecompositie van de matrix $A$.

d. Welke waarden neemt $q(\mathbf{x})$ aan op de bol $\|\mathbf{x}\| = 1$ in $\mathbf{R}^3$?

**10.** Zij $V$ een complexe vectorruimte met hermites inproduct $(\ ,\ )$. Zij verder $\{u_1, \ldots, u_n\}$ een orthonormale basis van $V$.

Bewijs de *identiteit van Parseval*

$$(x, x) = |(u_1, x)|^2 + \ldots + |(u_n, x)|^2.$$

**11.** Zij $T : V \to V$ een lineair endomorfisme van een eindig-dimensionale complexe vectorruimte $V$ met hermites inproduct.

Toon aan dat $T$ unitair is dan en slechts dan als $T$ normaal is en alle eigenwaarden van $T$ modulus 1 hebben.

**12.** Zij $T \in \mathcal{L}(V)$.

a. Laat zien dat $T = T_1 + iT_2$ met $T_1, T_2 : V \to V$ hermites.

b. Ga na dat $T$ normaal is dan en slechts dan als $T_1T_2 = T_2T_1$.

c. Leg uit aan de hand van Propositie 3.10 hoe de spectraaldecompositie voor compacte operatoren volgt uit de spectraaldecompositie van hermitese operatoren.

## VIII. Positief-definiete matrices.

**1.** $A$ en $B$ zijn positief-definiete $n \times n$-matrices.

a. Is $A + B$ positief definiet?

b. Bewijs dat $A$ inverteerbaar is. Is $A^{-1}$ positief definiet?

c. Zij $C$ een reële symmetrische matrix. Toon aan dat $C^2$ positief-semidefiniet is.

**2**a. Zij $A$ een positief-definiete $n \times n$-matrix. Bewijs dat er minstens $2^n$ normale matrices $B$ bestaan zodanig dat $B^2 = A$. Hoeveel hiervan zijn positief-definiet?

b. Bestaat er een niet-normale matrix $C$ zodanig dat $C^2 = A$?

c. Wat kun je concluderen t.a.v. de uniciteit van $\sqrt{A}$?

**3.** Bereken zo mogelijk $\sqrt{A}$:

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$.

b. Voor elk van de matrices in opgave V.6 (geef in de voorkomende gevallen aan voor welke $\lambda$ resp. $\lambda_i$ de wortel bestaat).

**4.** Toon aan dat de matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

positief definiet is.

**5**a. Bepaal $a, b, c$ zodanig dat de volgende vorm een hermitese vorm is en schrijf de vorm als $\mathbf{x}^* A \mathbf{y}$ met $A$ een hermitese matrix:

$$\langle x, y \rangle \;=\; 2\bar{x}_1 y_1 + b\bar{x}_1 y_2 + i\bar{x}_1 y_3 - 2\bar{x}_2 y_1 + 4\bar{x}_2 y_2 + c\bar{x}_3 y_1 + a\bar{x}_3 y_3.$$

b. Voor welke $a, b, c$ is de bovenstaande vorm een inwendig product?

**6.** Zij $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ een kwadratische vorm en $\{b_1, \ldots, b_n\}$ een basis van $\mathbf{R}^n$ zodat $F(b_i, b_i) > 0$ voor $i = 1, \ldots, n$. Is $F$ positief definiet?

**7.** Laten $A$ en $B$ positief-definiete $n \times n$-matrices zijn. Toon aan dat alle eigenwaarden van $AB$ positieve reële getallen zijn.

**8.** Laat $A$ een hermitese (reële of complexe) $n \times n$-matrix zijn en $B$ een positief-definiete $n \times n$-matrix. Beschouw het gegeneraliseerde eigenwaardeprobleem $A\mathbf{x} = \lambda B\mathbf{x}$. Als het eigenwaardenprobleem voor zekere $\lambda$ een oplossing $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ heeft, dan heet $\lambda$ een eigenwaarde van $A$ t.o.v. $B$; $\mathbf{x}$ noemen we een eigenvector.

a. Toon aan dat alle eigenwaarden reëel zijn.

b. Bewijs dat er een basis van eigenvectoren bestaat die orthonormaal is t.a.v. het inproduct $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^* B \mathbf{y}$ in $K^n$.

**9.** (Hessiaan) Het punt $O(0,0,0,0)$ is een stationair punt van de functie $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ gegeven door

$$f(x,y,z,w) = 2 + x^2 + 2y^2 + 3z^2 + w^2 + 2xy - 2xz + 2wz + 2ayw + w^3 + y^3 + z^3 + w^3.$$

Ga na voor welke $a \in \mathbf{R}$ de functie $f$ in $O$ een (lokaal) maximum, een minimum dan wel een zadelpunt heeft.

**10**a. Gebruik de $QR$-decompositie van een matrix om de ongelijkheid van Hadamard te bewijzen.

b. Laat zien dat in het geval van een inverteerbare matrix de ongelijkheid van Hadamard een gelijkheid is dan en slechts dan de kolomvectoren van de matrix orthogonaal zijn.

**11.** Laat $Z$ een willekeurige $n \times n$-matrix zijn en $R = \sqrt{ZZ^*}$, $S = \sqrt{Z^*Z}$. Bewijs dat $R$ en $S$ dezelfde eigenwaarden hebben met dezelfde multipliciteiten. (De eigenwaarden van $R$, resp. $S$ zijn de *singuliere waarden* van $Z$.)

**12.** Bepaal van de volgende matrices de singuliere-waardendecompositie:

i. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ii. $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

iii. $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. iv. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

v. $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. vi. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$.

vii. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. viii. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**13.** Bepaal van de volgende matrices de polaire decomposities $SO$ en $OS'$ met $O$ unitair en $S, S'$ positief definiet:

i. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ii. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

iii. $A \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ \sqrt{7} & 3 \end{pmatrix}$. iv. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

**14**. (Gaussische integralen) Zoals bekend is $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ voor $a > 0$.

a. Bewijs de volgende generalizatie in $\mathbf{R}^n$:

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j} dx_1 \ldots dx_n =: \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\mathbf{x}^T A \mathbf{x}} d^n\mathbf{x} = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det(A)}}$$

waarbij $A$ de symmetrische matrix $(a_{ij})$ is voor $A$ positief definiet. Ga ook na dat de integraal alleen convergeert als $A$ positief definiet is.

b. Bewijs dat voor $A$ reëel en positief definiet en $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\mathbf{x}^T A \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x}} d^n\mathbf{x} = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det(A)}} \cdot e^{\frac{1}{4}\mathbf{b}^T A^{-1} \mathbf{b}}.$$

## TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 2
## maandag 9 januari 2006, 10.00-13.00

---

**Bij elke vraag dient een berekening of motivering worden opgeschreven.**

**1.** Beschouw de vectorruimte $V = \mathbf{R}^3$ met de lineaire deelruimten $U = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ en

$W = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x_1 + x_3 = 0\}$.

a. Leg uit dat $V = U \oplus W$. (4 pt)

Zij $\pi_U : V \to V$ de projectie op $U$ langs $W$.

b. Wat is de rang van $\pi_U$? (2 pt)

c. Bepaal de matrix van $\pi_U$ t.o.v. de standaardbasis in $V = \mathbf{R}^3$. (6 pt)

**2.** $B$ is de permutatiematrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Toon aan dat het karakteristieke polynoom van $B$ gelijk is aan $-(X^2 - 1)(X^3 - 1)$. (3 pt)

$B$ heet diagonaliseerbaar *over* $K$ ($K = \mathbf{R}$ of $\mathbf{C}$) als er een diagonaalmatrix $D$ en een inverteerbare matrix $U$ bestaan met elementen in $K$ zo, dat $B = UDU^{-1}$.

b. Is $B$ diagonaliseerbaar over $\mathbf{C}$? (6 pt)

c. Is $B$ diagonaliseerbaar over $\mathbf{R}$? (3 pt)

**3.** Beschouw de kwadratische vorm $q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - 12x_1x_2 - 7x_2^2$ op $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal een symmetrische matrix $A$ zodanig dat $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$. (2 pt)

b. Bepaal een orthogonale matrix $U$ en reële getallen $d_1, d_2$ zo, dat $q(\mathbf{x}) = d_1y_1^2 + d_2y_2^2$ en $U\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. (6 pt)

c. Is de kwadratische vorm positief (semi-)definiet? (2 pt)

**4**a. Bepaal een matrix $A$ met karakteristiek polynoom $-X^5 + X^4$ en minimumpolynoom $X^4 - X^3$. (5 pt)

b. Bestaat er een matrix $B$ met hetzelfde karakteristieke polynoom en hetzelfde minimumpolynoom als de matrix $A$ in (a) terwijl $B$ niet gelijkvormig is met $A$? (4 pt)

**5.** $S : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ is een lineaire afbeelding met eigenwaarden 2 en -1 en bijbehorende eigenvectoren $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. (Op $\mathbf{C}^2$ is het standaard-hermites inproduct op de gebruikelijke wijze gedefinieerd.)

a. Leg uit dat uit de gegevens volgt dat $S$ een normale afbeelding is. (4 pt)

b. Bepaal de matrix van $S$ t.o.v. de standaardbasis in $\mathbf{C}^2$. (5 pt)

c. Bepaal de Euclidische norm $\|S\|$ van $S$. (2 pt)

d. Bereken de standaardmatrix van $e^S$. (4 pt)

(Als het niet gelukt is het antwoord van (b) te bepalen, dan mag i.p.v. (d) de matrix $e^{S'}$ met $S' = \begin{pmatrix} -2 & 6i \\ -6i & 7 \end{pmatrix}$ worden uitgerekend. Merk op dat $S'$ niet de standaardmatrix van $S$ is!)

**6.** $V$ is een complexe vectorruimte met hermites inproduct $( \ , \ )$. De dimensie van $V$ is gelijk aan 3. $\{a, b\}$ is een orthonormaal stelsel in $V$. Verder is de afbeelding $T : V \to V$ gegeven door $T(x) = i(a, x)b - i(b, x)a$.

a. Toon aan dat $T$ een lineaire afbeelding is. (3 pt)

b. Bewijs dat $T$ een hermitese (of zelfgeadjungeerde) afbeelding is. (5 pt)

c. Bewijs dat $T^2$ een orthogonale projectie is op span$\{a, b\}$. (4 pt)

d. Is $T$ zelf ook een orthogonale projectie? (2 pt)

**Antwoorden bij het tentamen van 9-1-06.**

**1**a. Omdat $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ (nagaan!) is de som $U + W$ gelijk aan de directe som $U \oplus W$. Verder is $\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W) = 3$, dus is $U \oplus W = V$ (een lineaire deelruimte van een eindig-dimensionale vectorruimte $V$ met dimensie gelijk aan $\dim(V)$, is gelijk aan $V$).

b. De rang van $\pi_U$ is de dimensie van het bereik $\mathrm{im}(\pi_U)$, dus $\mathrm{rang}(\pi_U) = \dim(U) = 1$.

c. Noem de matrix $P$. Dan is

$$P\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad P\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad P\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

dus $P = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1/2&0&1/2\\0&0&0\\1/2&0&1/2\end{pmatrix}$.

**2**a. Doen.

b. $B = UDU^{-1}$ betekent $BU = UD$ dus $Bu_i = d_iu_i$ met $u_i$ de $i$-e kolomvector van $U$ en $d_i = D_{ii}$. Dus $B$ diagonaliseerbaar over $K$ dan en slechts dan als $B$ een basis van eigenvectoren in $K^n$ heeft (waarbij de eigenwaarden in $K$ liggen).
Methode 1: $B$ is unitair dus $B$ heeft een (orthonormale) basis van eigenvectoren in $\mathbf{C}^n$; $B$ is dus diagonaliseerbaar over $\mathbf{C}$.

Methode 2: Het karakteristieke polynoom van $B$ heeft nulpunten $1, -1, -1/2 \pm (i/2)\sqrt{3}$. De e.w. $-1, -1/2 \pm (i/2)\sqrt{3}$ hebben alle algebraïsche en dus meetkundige multipliciteit 1, de e.w. 1 heeft alg.mult. 2 en $B$ is diagonaliseerbaar precies dan indien de meetkundige multipliciteit ook 2 is, m.a.w. als de nulruimte/kern van $B - I = \begin{pmatrix}-1&0&0&0&1\\0&-1&0&1&0\\1&0&-1&0&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&0&-1\end{pmatrix}$ dimensie 2 heeft (m.a.w. indien $\mathrm{rang}(B - I) = 3$). Dit is inderdaad het geval (de som van de 1e, 3e en 5e rij is de nulrij en de som van de 2e en 4e rij ook).

c. Omdat $B$ ook niet-reële eigenwaarden heeft (nl. $1/2 \pm (i/2)\sqrt{3}$) kan $B$ nooit een basis van eigenvectoren in $\mathbf{R}^5$ hebben. $B$ is dus niet diagonaliseerbaar over $\mathbf{R}$.

**3**a. $A = \begin{pmatrix}2&-6\\-6&-7\end{pmatrix}$.

b. $A$ heeft eigenwaarden 5 en -10 met eigenvectoren $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Dus is $A = UDU^T$ met

$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$ en $U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ een orthogonale matrix van eigenvectoren. $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T UDU^T\mathbf{x} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} = 5y_1^2 - 10y_2^2$ en $U^T\mathbf{x} = \mathbf{y}$ dus $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$.

c. De symmetrische matrix $A$ is positief (semi-)definiet als $A$ louter positieve (resp. niet-negatieve) eigenwaarden heeft. $A$ heeft echter zowel een positieve als een negatieve eigenwaarde, dus is indefiniet.

**4**a. $A$ moet een $5 \times 5$-matrix zijn. De eigenwaarden zijn 0 met alg.multipliciteit 4 en 1 met alg. multipliciteit 1. Omdat in het minimumpolynoom $X^3(X-1)$ de factor $X$ drie keer voorkomt, is de grootte van het grootste Jordanblok bij de e.w. 0 gelijk aan 3. Een matrix met deze eigenschappen is de Jordan-normaalvorm $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. De JNV van de matrix heeft volgens (a) 1 Jordanblok bij e.w. 0 van grootte 3 en heeft dus nog een Jordanblok bij e.w. 0 van grootte 1; er is een Jordanblok bij e.w. 1 van grootte 1. De Jordan-normaalvorm is dus uniek (op permutatie van de blokken na). Daar twee matrices gelijkvormig zijn precies dan indien zij dezelfde JNV hebben, bestaat er niet zo'n matrix $B$.

**5**. De eigenvectoren zijn t.o.v. het standaard hermites inproduct orthogonaal: $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = -i \cdot 1 + 1 \cdot i = 0$. $S$ heeft dus een orthogonale basis van eigenvectoren en is dus een normale afbeelding.

b. Gebruik de spectraaldecompositie: (we schrijven $S$ voor de standaardmatrix): $S = 2u_1u_1^* - u_2u_2^*$ met $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ en $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ (of $S = UDU^*$ met $U = (u_1\ u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ en $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$). Uitwerken geeft $S = \frac{2}{2} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3i \\ -3i & 1 \end{pmatrix}$.

c. Omdat $S$ normaal is, is $\|S\|$ gelijk aan het maximum van de moduli van de eigenwaarden, dus $\|S\| = 2$.

d. $e^S = e^2 u_1u_1^* + e^{-1}u_2u_2^*$ of $e^S = Ue^DU^*$ met $e^D = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$. Uitwerken geeft

$$e^S = \frac{e^2}{2} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^{-1}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^2 + e^{-1} & ie^2 - ie^{-1} \\ -ie^2 + ie^{-1} & e^2 + e^{-1} \end{pmatrix}.$$

d.' De matrix $S'$ is hermites en heeft eigenwaarden 10 en -5 met eigenvectoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$. De norm van $S'$ is dus 10 en $S' = UDU^*$ met $U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$ en $D = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$. Dan is $e^{S'} = Ue^DU^* = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} e^{10} + 4e^{-5} & 2ie^{10} - 2ie^{-5} \\ -2ie^{10} + 2ie^{-5} & 4e^{10} + e^{-5} \end{pmatrix}$.

**6**a. We gebruiken dat het inproduct lineair is in de tweede component: $T(x+y) = i(a, x+y)b - i(b, x+y)a = i(a,x)b + i(a,y)b - i(b,x)a - i(b,y)a = T(x) + T(y)$ en $T(\lambda x) = i(a, \lambda x)b - i(b, \lambda x)a = i\lambda(a,x)b - i\lambda(b,x)a = \lambda T(x)$ voor $\lambda \in \mathbf{C}$ en $x, y \in V$.

b. Methode 1: $(T(x), y) = (i(a,x)b - i(b,x)a, y) = -i(x,a)(b,y) + i(x,b)(a,y)$ wegens antilineariteit van de eerste component en $(x,a) = \overline{(a,x)}$. $(x, T(y)) = (x, i(a,y)b - i(b,y)a) = i(a,y)(x,b) - i((b,y)(x,a)$ wegens lineariteit van de tweede component. We zien dat $(T(x), y) = (x, T(y))$ voor $x, y \in V$ en dus is $T$ hermites.

Methode 2: Vul $\{a, b\}$ aan tot een orthonormale basis $\{a, b, c\}$ van $V$. Daar $T(a) = ib$, $T(b) = -ia$ en $T(c) = 0$ is de matrix van $T$ t.o.v. deze basis $A_T = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ en daar $A_T^* = A_T$ is ook $T = T^*$ (deze conclusie gaat alleen op als $A_T$ de matrix is t.o.v. een **orthonormale** basis!).

c. Uit $T(a) = ib$, $T(b) = -ia$ volgt dat $T^2(a) = a$ en $T^2(b) = b$ en verder is $T^2(x) = T(x) = 0$ als $(x,a) = (x,b) = 0$. Dus is $T^4 = (T^2)^2 = T^2$ en $T^2$ is net als $T$ hermites. $T^2$ is dus een orthogonale projectie op im($T$)=span$\{a, b\}$.

d. Daar $T^2 \neq T$ is $T$ geen (orthogonale) projectie.

**TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 2**
**dinsdag 28 maart 2006, 10.00-13.00**

---

**Bij elke vraag dient een berekening of motivering worden opgeschreven.**

**1.** In $V = \mathbf{R}^4$ zijn gegeven de vectoren $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $V$ is voorzien van het standaard-inproduct. Verder zijn gegeven de lineaire deelruimten $U = \text{span}\{\mathbf{u}\}$, $W = \text{span}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ en $Z = \text{span}\{\mathbf{z}\}$.

a. Leg uit dat $V = U \oplus W \oplus Z$. (6 pt)

$\pi_U : V \to V$ is de projectie op de component $U$ in de directe som.

b. Is $\pi_U$ de orthogonale projectie op $U$? (Motiveer je antwoord). (3 pt)

c. Bepaal de matrix van $\pi_U$ t.o.v. de standaardbasis in $\mathbf{R}^4$. (7 pt)

**2.** Beschouw de matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal een Jordan-normaalvorm van $A$ en bepaal het minimumpolynoom van $A$. (10 pt)

b. Ga na of $A$ en $B$ gelijkvormige matrices zijn. (6 pt)

**3.** $V$ is de verzameling van complexe $3 \times 3$-matrices. T.o.v. de matrixoptelling en scalaire vermenigvuldiging krijgt $V$ de structuur van een complexe vectorruimte. $U$ is de deelverzameling van symmetrische $3 \times 3$-matrices (dus $X = X^T$ voor $X \in U$) en $W$ is de deelverzameling van de antisymmetrische matrices.

a. Ga na dat $U$ en $W$ lineaire deelruimten van $V$ zijn en bepaal de dimensies. (6 pt)

b. Bewijs dat $(X, Y) = \text{tr}(X^* Y)$ een (hermites) inproduct op $V$ is. Hierbij is tr het spoor en $X^*$ de hermites geadjungeerde van $X$. (7 pt)

c. Bewijs dat $U = W^\perp$ t.a.v. het in (b) gegeven inproduct. (7 pt)

d. $T : V \to V$ is de lineaire afbeelding die een matrix $X$ afbeeldt op $T(X) = X - X^T$. Beredeneer waarom $T$ een normale afbeelding is en bepaal de norm $\|T\|$ (hierbij is $\| \ \|$ de (Euclidische) afbeeldingsnorm die wordt geïnduceerd door het inproduct). (8 pt)

**4.** Beschouw de kwadratische vorm $q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$ op $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal een symmetrische matrix $A$ zodanig dat $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$. (2 pt)

b. Bepaal een orthogonale matrix $U$ en reële getallen $d_1, d_2$ zo, dat de kwadratische vorm in diagonaalvorm staat, m.a.w. $q(\mathbf{x}) = d_1y_1^2 + d_2y_2^2$ en $U \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. (8 pt)

c. Welke waarden neemt $q(\mathbf{x})$ aan op de eenheidscirkel $x_1^2 + x_2^2 = 1$? (4 pt)

**5.** $V$ is een driedimensionale complexe vectorruimte met inwendig product ( , ). $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ is een orthonormale basis in $V$. De afbeelding $T : V \to V$ is gegeven door
$T(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x})\mathbf{b} + (\mathbf{b}, \mathbf{x})\mathbf{c} + (\mathbf{c}, \mathbf{x})\mathbf{a}$.

a. Bepaal de hermites geadjungeerde $T^*$ van $T$. (5 pt)

b. Bewijs dat $T$ unitair is. (5 pt)

c. Bepaal de eigenwaarden van $T$. (6 pt)

**6.** $A$ is een inverteerbare complexe $n \times n$-matrix.

a. Laat zien dat $A^*A$ positief definiet is. (3 pt)

b. Bewijs dat $A^*A$ louter positieve reële eigenwaarden heeft (zonder het feit te gebruiken dat een positief-definiete matrix louter positieve eigenwaarden heeft). (4 pt)

**Antwoorden bij het tentamen van 28-3-06.**

**1.** Ga na dat de vier vectoren lineair onafhankelijk zijn. Dus is de som $U+W+Z$ een directe som (nl. anders zou er een niet-triviale lineaire combinatie van de vectoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}$ zijn die nul oplevert). De som van de dimensies is verder 4, dus de directe som is een lineaire deelruimte met dimensie 4 en is dus gelijk aan $V$.

b. $\pi_U$ is niet de orthogonale projectie omdat $U^{\perp} \neq W \oplus Z$ (immers $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$).

c. Vanwege (b) kunnen we niet de formule voor orthogonale projectie gebruiken. We bepalen de beelden van de standaardbasisvectoren rechtstreeks (of gebruik basistransformatiematrices, maar dat is hier omslachtiger). Noem de matrix $P$. Dan is $P(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ en $P(\mathbf{v}) = P(\mathbf{w}) = \mathbf{P}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$. Door handige lineaire combinaties te nemen (zoals $\mathbf{u}+\mathbf{z}, \mathbf{u}-\mathbf{z}$) vinden en te bedenken dat de $i$-e kolom van $P$ gelijk is aan $P\mathbf{e}_i$ vinden we $P = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & -1/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/4 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**2.** Beide matrices hebben karakteristiek polynoom $(X-2)^4$. $A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ en $B - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hebben beide rang 2, dus de e.w. 2 heeft meetkundige multipliciteit 2 en algebraïsche mult. 4. Er zijn in beide gevallen 2 Jordanblokken bij e.w. 2. Verder heeft $(A-2I)^2$ rang 1, dus er is één Jordanblok bij $A$ van afmeting minstens 2. De JNV van $A$ is dus $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ en het minimumpolynoom is $(X-2)^3$ omdat het grootste Jordanblok bij e.w. 2 afmeting 3 heeft. Daarentegen is $(B-2I)^2 = O$ dus $B$ heeft twee Jordanblokken van afmeting 2 (en dus JNV $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$). $A$ en $B$ zijn dus niet gelijkvormig.

**3a.** Ga na dat als $X, Y$ symmetrisch, resp antisymmetrisch zijn dan zijn $X+Y$ en $aX$ (voor $a \in \mathbf{C}$) symmetrisch resp. antisymmetrisch. Verder is $\dim(U) = 6$ en $\dim(W) = 3$ net als voor reële matrices. Immers als $(u_{ij})$ symmetrisch is, dan is $u_{ij} = u_{ji}$ en er zijn 6 onafhankelijke keuzen voor $u_{ij}$. Als $(w_{ij})$ antisymmetrisch is, dan is $w_{ii} = 0$ en $w_{ij} = -w_{ji}$ dus er zijn maar 3 onafhankelijke keuzen $w_{12}, w_{13}, w_{23}$.

b. Er geldt dat $\mathrm{tr}(X^*Y) = \sum_{i,j=1}^{3} \overline{x_{ij}} y_{ij}$. Dit is het standaard(-hermites) inproduct op $\mathbf{C}^9$ (met een geschikte hernummering van de indices).

c. Als $X$ symmetrisch en $Y$ antisymmetrisch, dan is $x_{ij} = x_{ji}$ en $y_{ij} = -y_{ji}$ dus

$$\sum_{i,j=1}^{3} \overline{x_{ij}} y_{ij} = \sum_{i,j=1}^{3} \overline{x_{ji}} y_{ji} = -\sum_{i,j=1}^{3} \overline{x_{ij}} y_{ij},$$

m.a.w. als $X \in U$ en $Y \in W$ dan is $(X,Y) = -(X,Y)$ dus $(X,Y) = 0$. Dus geldt $W \subset U^{\perp}$. Omdat anderzijds $\dim(U^{\perp}) = 9 - \dim(U) = 3 = \dim(W)$ geldt $W = U^{\perp}$.

d. Als $X \in U$ dan is $T(X) = 0$ en als $X \in W$ dan is $T(X) = 2X$. Omdat $V = U \oplus W$, is $U$ de eigenruimte van $T$ bij eigenwaarde 0 en $W$ de eigenruimte bij e.w. 2 en $T$ heeft geen andere eigenwaarden. Uit (c) volgt dat $T$ een orthogonale basis van eigenvectoren heeft (nl. neem de vereniging een orthogonale basis in $U$ en een orthogonale basis in $W$), is $T$ normaal. De Euclidische norm van een normale afbeelding is het maximum van de moduli van de eigenwaarden, dus $\|T\| = 2$.

**4**a. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

b. Daar $A = UDU^T$ met $D$ een diagonaalmatrix (met de eigenwaarden $d_1, d_2$ van $A$ op de hoofddiagonaal) en $U$ een orthogonale matrix van eigenvectoren, is $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T UDU^T\mathbf{x} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2$ met $U^T\mathbf{x} = \mathbf{y}$ dus $U\mathbf{y} = \mathbf{x}$. De eigenwaarden van $A$ zijn $d_1 = 2, d_2 = 4$ met eigenvectoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Omdat $U$ een orthogonale matrix van eigenvectoren is is $U = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c. Merk op dat omdat $U$ orthogonaal is, $\|\mathbf{y}\| = \|U\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|$. Dus als $x_1^2 + x_2^2 = 1$, dan is ook $y_1^2 + y_2^2 = 1$. Dan neemt $q(\mathbf{x}) = 2y_1^2 + 4y_2^2$ alle waarden in het interval $[2,4]$ aan.

**5**a. M.b.v. $(\mathbf{y}, T(\mathbf{x})) = (T^*(\mathbf{y}), \mathbf{x})$ vinden we $T^*(\mathbf{y}) = (\mathbf{b},\mathbf{y})\mathbf{a} + (\mathbf{c},\mathbf{y})\mathbf{b} + (\mathbf{a},\mathbf{y})\mathbf{c}$.

b. $T^*T(\mathbf{x}) = (\mathbf{a},\mathbf{x})\mathbf{a} + (\mathbf{b},\mathbf{x})\mathbf{b} + (\mathbf{c},\mathbf{x})\mathbf{c}$. Omdat $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ een orthonormale basis is, is het rechterlid gelijk aan $\mathbf{x}$ (spectrale decompositie van de identiteit). Dus is $T^*T = id_V$ ofwel $T^* = T^{-1}$ en $T$ is dus unitair.

Anders: De matrix van $T$ t.o.v. de basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ is $T_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dit is een unitaire matrix (nagaan dat $(T_{\mathcal{B}})^{-1} T_{\mathcal{B}} = I$). Omdat de basis $\mathcal{B}$ orthonormaal is, is de afbeelding $T$ ook unitair (merk op dat dit alleen opgaat als de basis orthonormaal is!).

c. We gebruiken de matrix $T_{\mathcal{B}}$: het karakteristieke polynoom is $-X^3 + 1$. De eigenwaarden zijn dus $1, e^{2\pi i/3} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}\sqrt{3}$ en $e^{-2\pi i/3} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2}\sqrt{3}$.

**TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 2**
**donderdag 11 januari 2007, 10.00-13.00**

---

**Bij elke vraag dient een berekening of motivering te worden opgeschreven.**
Grafische rekenmachines zijn op het tentamen niet toegestaan, wel mag een gewone, niet-programmeerbare, wetenschappelijke rekenmachine worden gebruikt.

---

**1.** Laat $\ell \subset \mathbf{R}^3$ de lijn zijn die wordt opgespannen door $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal een orthonormale basis van $\ell^\perp$. (4 pt)

Zij $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ de rotatie in $\mathbf{R}^3$ met $\ell$ als rotatieas en $\pi$ als rotatiehoek.

b. Geef een geschikte orthonormale basis van $\mathbf{R}^3$ en bepaal de matrix van $A$ t.o.v. die basis. (6 pt)

c. Bepaal de matrix van $A$ t.o.v. de standaardbasis. (6 pt)

**2.** Beschouw in $\mathbf{R}^2$ de bilineaire vorm $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_2$. Hierbij is $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

a. Toon aan dat $B(\ ,\ )$ een inwendig product op $\mathbf{R}^2$ is. (7 pt)

b. Bepaal een basis van $\mathbf{R}^2$ die orthonormaal is t.o.v. het inwendig product $B(\ ,\ )$. (10 pt)

**3.** Gegeven is de matrix $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 10 & -6 \\ 4 & 0 & 15 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal de eigenwaarden van $C$ en geef voor iedere eigenwaarde een basis van de bijbehorende eigenruimte. Geef tevens de algebraïsche en meetkundige multipliciteit van iedere eigenwaarde. (8 pt)

b. Bepaal een Jordan-normaalvorm van $C$ en geef tevens het minimumpolynoom van $C$. (10 pt)

**4.** Zij $V = \mathcal{M}(n \times n, \mathbf{C})$ de vectorruimte van complexe $n \times n$-matrices voorzien van het inwendig product $(A, B) = \mathrm{tr}(A^*B)$. Laat $U$ een vaste unitaire $n \times n$-matrix zijn en definieer de lineaire afbeelding $\psi : V \to V$ door $\psi(A) = UA$.

a. Laat zien dat $\psi$ een unitaire afbeelding is. (4 pt)

Laat $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ een orthonormale basis van eigenvectoren van $U$ zijn in $\mathbf{C}^n$. Definieer de matrices $A_{ij}$ voor $i, j = 1, 2, \ldots, n$ d.m.v.

$$A_{ij} = (\mathbf{0} \ldots \mathbf{0}\ \mathbf{a}_j\ \mathbf{0} \ldots \mathbf{0})$$

waarbij $\mathbf{a}_j$ in de $i$-e kolom staat (en de andere kolomvectoren de nulvector zijn).

b. Toon aan dat $A_{ij}$ een eigenvector is van $\psi$. (4 pt)

c. Toon aan dat de matrices $A_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ een orthonormale basis van eigenvectoren van $\psi$ vormen. (6 pt)

d. Laat $\chi_U$ en $\chi_\psi$ de karakteristieke polynomen zijn van $U$ resp. $\psi$. Leg uit waarom $\chi_\psi(x) = \chi_U(x)^n$. (4 pt)

**5.** Laten $x_1, \ldots, x_n$ verschillende reële getallen zijn. Zij $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ en laat $W$ de vectorruimte zijn van alle reële functies $f : S \to \mathbf{R}$, met puntsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging.

a. Laat zien dat $W$ $n$-dimensionaal is. (5 pt)

Zij $P_{n-1}$ de vectorruimte van alle polynomen $p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$ van graad hoogstens $n - 1$ met reële coëfficiënten $a_j$ en met puntsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging. Definieer de (restrictie)afbeelding Res: $P_{n-1} \to W$ door

$$(\mathrm{Res}\ p)(x_k) = p(x_k) \qquad \text{voor } k = 1, \ldots, n.$$

b. Laat zien dat Res een lineaire afbeelding is. (4 pt)

c. Toon aan dat Ker Res $= \{0\}$. (4 pt)

d. Bewijs dat er voor iedere keuze van reële getallen $c_1, \ldots, c_n$ precies één polynoom $p$ van graad hoogstens $n - 1$ is, zodanig dat $p(x_k) = c_k$ voor $k = 1, \ldots, n$. (5 pt)

## Antwoorden.

**1a.** Een orthonormale basis van $\ell^\perp$ is $\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\}$.

b. Een geschikte orthonormale basis is $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\}$. T.o.v. deze basis is de matrix van $A$

$$A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

c. De matrix van $A$ t.o.v. de standaardbasis $\mathcal{E}$ is

$$A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = B_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} B_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

waarbij de basistransformatiematrix $B_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$ de matrix is met als kolomvectoren de vectoren van de orthonormale basis $\mathcal{B}$ en $B_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = (B_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}})^{-1} = (B_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}})^T$.

**2a.** Merk op dat $B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T B\mathbf{y}$ met $B = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$. $B = B^T$ dus $B$ is symmetrisch, en de matrix $B$ is positief definiet (heeft twee positieve eigenwaarden), dus $B(\ ,\ )$ is bilineair, symmetrisch en positief-definiet en dus een inproduct.

b. We passen Gram-Schmidt toe op de standaardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (met het gegeven inproduct):

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_2 - \frac{B(\mathbf{e}_2,\mathbf{a}_1)}{B(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1)}\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix}-1/2\\1\end{pmatrix}.$$

Delen door de norm geeft een orthonormaal stelsel:

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}.$$

**3a.** Het karakteristieke polynoom is $(X-2)^4$, de enige eigenwaarde is dus 2 met algebraïsche multipliciteit 4 en meetkundige multipliciteit 2: de eigenruimte $\mathrm{Ker}(C-2I)$ wordt opgepannen door de 2 vectoren $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}0\\0\\3\\5\end{pmatrix}$.

b. Uit een berekening volgt dat rang$(C-2I)^2 = 1$, dus rang$(C-2I)$ - rang$(C-2I)^2 = 1$; er zijn dus twee Jordanblokken (2 is de dimensie van de eigenruimte) en 1 Jordanblok van afmeting minstens 2. Een Jordan-normaalvorm is dus $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Het minimumpolynoom is $(X-2)^3$: de grootste afmeting van de Jordanblokken bij e.w. 2 is immers gelijk aan 3.

**4a.** Omdat $U^*U = I$ is

$$(\psi(A), \psi(B)) = \operatorname{tr}(A^*U^*UB) = \operatorname{tr}(A^*B) = (A, B)$$

dus $\psi$ is unitair.

b.

$$UA_{ij} = (\mathbf{0} \ldots \mathbf{0} \; U\mathbf{a}_j \; \mathbf{0} \ldots \mathbf{0}) = (\mathbf{0} \ldots \mathbf{0} \; \lambda_j \mathbf{a}_j \; \mathbf{0} \ldots \mathbf{0}) = \lambda_j A_{ij}.$$

c.

$$A_{ij}^* A_{k\ell} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j^* \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{a}_\ell & \ldots & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{a}_j^* \mathbf{a}_\ell E_{ik}$$

waarbij $E_{ik}$ de matrix is met 1 in de $i$-e rij en $k$-e kolom en verder nullen. (Hierbij is $\delta_{ij}$ het Kronecker-symbool dus $\delta_{ij} = 1$ als $i = j$ en 0 als $i \neq j$). Nu is, aangezien $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ een orthonormale basis is van $\mathbf{C}^n$,

$$(A_{ij}, A_{k\ell}) = \operatorname{tr}(A_{ij}^* A_{k\ell}) = \mathbf{a}_j^* \mathbf{a}_\ell \cdot \operatorname{tr}(E_{ik}) = \delta_{ik}\delta_{j\ell}$$

dus $\{A_{ij}\}_{i,j=1}^n$ is een orthonormaal stelsel in $V$.

*Alternatief:*

$$(A_{ij}, A_{k\ell}) = \operatorname{tr}(A_{ij}^* A_{k\ell}) = \sum_{p,q=1}^{n} (\overline{A_{ij}})_{pq} (A_{k\ell})_{pq} = \sum_{p,q=1}^{n} \delta_{iq}\delta_{kq} (\overline{\mathbf{a}_j})_p (\mathbf{a}_\ell)_p = \delta_{ik} \mathbf{a}_j^* \mathbf{a}_\ell = \delta_{ik}\delta_{j\ell}$$

Dit orthonormale stelsel is tevens een basis omdat een orthonormaal stel lineair onafhankelijk is en er precies $n^2 = \dim(V)$ matrices $A_{ij}$ zijn.

d. Met elke eigenvector $\mathbf{a}_j$ van $U$ corresponderen $n$ eigenvectoren $A_{ij}$ $(i = 1, \ldots, n)$ van $\psi$ met dezelfde eigenwaarde $\lambda_j$. De multipliciteit van de eigenwaarde $\lambda$ van $\psi$ is dus $n$ keer zo groot als de multipliciteit van de eigenwaarde $\lambda$ bij $U$. Dus is

$$\chi_\psi(X) = (-1)^n \prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j)^n = \left( \prod_{j=1}^{n} (-1)^n (X - \lambda_j) \right)^n = \chi_U(X)^n.$$

**5a.** Laat $T : W \to \mathbf{R}^n$ de afbeelding zijn gegeven door $T(f) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$. $T$ is lineair en inverteerbaar.

Dus is $\dim(W) = \dim(\mathbf{R}^n) = n$.

*Alternatieve oplossing:* Laat $f_i : S \to \mathbf{R}$ gegeven zijn door $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Als $f \in W$, dan is $f = \sum_{i=1}^n f(x_i) f_i$ dus $W$ wordt opgespannen door $f_1, \ldots, f_n$. Verder zijn de functies $f_i$ lineair onafhankelijk, nl. uit $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$ volgt dat

$$0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j$$

voor $j = 1, \ldots, n$. De conclusie is dat $\{f_1, \ldots, f_n\}$ een basis vormt van $W$ dus $\dim(W) = n$.

b. Ga na dat $\mathrm{Res}(p + q) = \mathrm{Res}(p) + \mathrm{Res}(q)$ en ook $\mathrm{Res}(\lambda p) = \lambda \mathrm{Res}(p)$ voor $\lambda \in \mathbf{R}$.

c. Zij $p$ een polynoom van graad hoogstens $n - 1$ zodanig dat $\mathrm{Res}(p) = 0$; dan is $p(x_k) = 0$ voor $k = 1, \ldots, n$. Het polynoom $p$ heeft dus minstens $n$ nulpunten en dit is alleen mogelijk als $p = 0$.

d. Volgens de dimensiestelling is rang(Res)+dim Ker(Res)=$\dim(P_{n-1})$=$n$. Volgens (c) is de rang van Res gelijk aan $n = \dim(W)$ en dus is Res surjectief. Omdat Res ook injectief is volgens (c), is Res een bijectieve lineaire afbeelding. Nu is er precies één functie $f$ in $W$ zodanig dat $f(x_k) = c_k$ voor $k = 1, \ldots, n$, dus is er ook precies één polynoom $p \in P_{n-1}$ zodanig dat $p(x_k) = c_k$, nl. $f = \mathrm{Res}(p)$.

**TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 2**
**dinsdag 3 april 2007, 10.00-13.00**

---

**Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven. Bij elke vraag dient een berekening of motivering te worden opgeschreven.**

Grafische en programmeerbare rekenmachines zijn op het tentamen niet toegestaan, wel mag een gewone (niet-programmeerbare) wetenschappelijke rekenmachine worden gebruikt.

---

**1.** Zij $V \subset \mathbf{R}^3$ het vlak met vergelijking $x_1 + 2x_2 = 0$. $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ is de loodrechte spiegeling in $V$.

a. Bepaal een orthonormale basis van $V$. (4 pt)

b. Geef een geschikte orthonormale basis van $\mathbf{R}^3$ en bepaal de matrix van $S$ t.o.v. die basis. (6 pt)

c. Bepaal de matrix van $S$ t.o.v. de standaardbasis. (6 pt)

**2.** Beschouw in $\mathbf{C}^2$ de vorm $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{x_1}y_1 + i\,\overline{x_2}y_1 - i\,\overline{x_1}y_2 + 3\overline{x_2}y_2$. Hierbij is $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

a. Toon aan dat $B(\ ,\ )$ een (hermites) inwendig product op $\mathbf{C}^2$ is. (7 pt)

b. Bepaal een basis van $\mathbf{C}^2$ die orthonormaal is t.o.v. het inwendig product $B(\ ,\ )$. (10 pt)

**3.** Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal een Jordan-normaalvorm van $A$. (10 pt)

b. Bepaal het minimumpolynoom van $A$. (3 pt)

c. Druk $A^{-1}$ uit als een polynoom in $A$. (3 pt)

**4.** Zij $P_n$ de vectorruimte van polynomen $p(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ van graad hoogstens $n$ met complexe coëfficiënten $a_0, \ldots, a_n$ en met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging. Met $p'(X)$ geven we de afgeleide naar $X$ van $p(X)$ aan. Laat $U = \{p \in P_n : p(1) = p'(1) = 0\}$ en $W = \text{span}\{1, X\}$.

a. Toon aan dat $U$ een lineaire deelruimte is van $P_n$. (4 pt)

b. Toon aan dat $\{(X-1)^2, (X-1)^3, \ldots, (X-1)^n\}$ een basis is van $U$. (4 pt)

c. Bewijs dat $P_n = U \oplus W$. (4 pt)

$\pi : P_n \to P_n$ is de lineaire afbeelding gegeven door $\pi(p)(X) = p(1) + p'(1)(X-1)$.

d. Bepaal de matrix van $\pi$ t.o.v. de basis $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$. (6 pt)

e. Leg uit dat $\pi$ de projectie op $W$ langs $U$ is (m.a.w. $\pi$ is de projectie op de tweede component van de directe som in (c)). (6 pt)

**5.** Zij $V = \mathcal{M}(n \times n, \mathbf{C})$ de vectorruimte van complexe $n \times n$-matrices met inwendig product $(A, B) = \text{tr}(A^*B)$ (voor $n$ geheel, $n > 1$). Voor $D \in V$ is de lineaire afbeelding $R_D : V \to V$ gedefinieerd als $R_D(A) = AD$. Verder is de afbeelding $R : V \to \mathcal{L}(V)$ gedefinieerd door $R(D) = R_D$ (hierbij is $\mathcal{L}(V)$ de vectorruimte van lineaire afbeeldingen van $V$ naar zichzelf).

a. Laat zien dat $R$ een lineaire afbeelding is. (4 pt)

b. Toon aan dat $\ker(R) = \{0\}$. (3 pt)

c. Ga na of $R$ inverteerbaar is. (3 pt)

d. Voor $D \in V$ is $(R_D)^*$ de geadjungeerde afbeelding van $R_D$. Bewijs dat $(R_D)^* = R_{D^*}$. (4 pt)

e. Zij $D \in V$. Bewijs dat $D$ en $R_D$ dezelfde eigenwaarden hebben. (4 pt)

**Antwoorden.**

**1a.** Een orthonormale basis van $V$ is $\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$.

b. Een geschikte orthonormale basis is $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$. T.o.v. deze basis is de matrix van $A$

$$A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

c. De matrix van $A$ t.o.v. de standaardbasis $\mathcal{E}$ is

$$A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = B_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} B_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}3/5 & -4/5 & 0\\ -4/5 & -3/5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

waarbij de basistransformatiematrix $B_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}-2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0\\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ de matrix is met als kolomvectoren de vectoren van de orthonormale basis $\mathcal{B}$ en $B_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = (B_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}})^{-1} = (B_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}})^{T}$.

**2a.** Merk op dat $B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^*B\mathbf{y}$ met $B = \begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 3\end{pmatrix}$. $B = B^*$ dus $B$ is hermites, en de matrix $B$ is positief definiet (heeft twee positieve eigenwaarden), dus $B(\ ,\ )$ is sesquilineair, hermites en positief-definiet en dus een inproduct.

b. We passen Gram-Schmidt toe op de standaardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (met het gegeven inproduct):

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_2 - \frac{B(\mathbf{a}_1,\mathbf{e}_2)}{B(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1)}\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}.$$

Delen door de norm $\|\mathbf{a}\| = B(\mathbf{a},\mathbf{a})^{1/2}$ geeft een orthonormaal stelsel:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}.$$

**3a.** Het karakteristieke polynoom is $-(X-1)^3(X-2)^2$. Verder is de rang van $A-I$ gelijk aan 3, de rang van $A-2I$ is 4. Er zijn dus twee Jordanblokken bij e.w. 1 en er is er een bij e.w. 2; een Jordan-normaalvorm is dan gelijk aan $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Het minimumpolynoom is $(X-1)^2(X-2)^2 = X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 12X + 4$.

c. Uit (b) volgt dat $A^4 - 6A^3 + 13A^2 - 12A + 4I = O$ en dus is $A^{-1} = -\frac{1}{4}A^3 + \frac{3}{2}A^2 - \frac{13}{4}A + 3I$.

**4**a. Als $p, q$ polynomen in $P_n$ zijn zodanig dat $p(1) = p'(1) = q(1) = q'(1) = 0$ dan geldt, voor $a, b \in \mathbf{C}$:

$$(ap + bq)(1) = ap(1) + bq(1) = 0, \quad (ap + bq)'(1) = ap'(1) + bq'(1) = 0.$$

b. We tonen eerst aan dat $\{1, (X-1), \ldots, (X-1)^k\}$ lineair onafhankelijk zijn voor alle $0 \le k \le n$. We gebruiken volledige inductie naar $k$: voor $k = 0$ duidelijk. Stel het is waar voor $k < K$. Neem aan dat

$$c_0 + c_1(X-1) + \ldots + c_K(X-1)^K = 0$$

voor zekere $c_0, \ldots, c_K \in \mathbf{C}$. Uitschrijven in machten van $X$ geeft

$$0 = c_K X^K + \text{ lagere machten van } X.$$

Omdat $1, X, \ldots, X^K$ lineair onafhankelijk zijn volgt dat $c_K = 0$, maar dan volgt uit de lineaire onafhankelijkheid van $1, \ldots, (X-1)^{K-1}$ dat ook $c_0 = \ldots = c_{K-1} = 0$. Dus zijn $1, \ldots, (X-1)^K$ lineair onafhankelijk.

Omdat $\dim P_n = n+1$, is $\{1, X-1, \ldots, (X-1)^n\}$ een maximaal lineair onafhankelijk stelsel en dus een basis van $P_n$. Laat nu $p \in P_n$. Dan is $p(X) = b_0 + b_1(X-1) + \ldots + b_n(X-1)^n$ voor zekere $b_0, \ldots, b_n$. Nu is $p(0) = b_0$ en $p'(0) = b_1$. Dus $p \in U$ dan en slechts dan als $b_0 = b_1 = 0$ dus $U = \text{span}\{(X-1)^2, \ldots, (X-1)^n\}$. Maar $\{(X-1)^2, \ldots, (X-1)^n\}$ is een lineair onafhankelijk stelsel (als deelstelsel van $\{1, \ldots, (X-1)^n\}$) en dus een basis van $U$.

(Een iets korter antwoord is het volgende: omdat $p(1) = p'(1) = 0$ twee onafhankelijke lineaire condities zijn is $\dim(U) = n + 1 - 2 = n - 1$. Een lineair onafhankelijk stelsel bestaande uit $n-1$ polynomen die in $U$ liggen vormt dus een basis van $U$. Lineaire onafhankelijkheid aantonen gaat als boven.)

c. Uit (b) volgt dat $\dim(W) + \dim(U) = 2 + (n-1) = n + 1 = \dim P_n$. Verder is $U \cap W = \{0\}$: immers als $q \in W$ dan is $q(X) = a_1 X + a_0$ en uit $q(1) = q'(1) = 0$ volgt dat $a_0 = a_1 = 0$. Maar dan is $P_n = U \oplus W$.

d. Omdat $\pi(X^k) = kX + (1-k)$, is de matrix van $\pi$ gelijk aan $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \ldots & 1-n \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$.

e. $\pi$ is lineair (dit is gegeven) en $\pi = \pi^2$ dus $\pi$ is een projectie. Verder is $\mathrm{im}(\pi) = W$ en $\ker(\pi) = U$. Dus $\pi$ is een projectie op $U$ langs $W$.

**5a.** Laat $C, D \in V$ en $a, b \in \mathbf{C}$. Dan is, voor $A \in V$ willekeurig,

$$R(aC+bD)(A) = R_{aC+bD}(A) = A(aC+bD) = aAC+bAD = aR_C(A)+bR_D(A) = (aR(C)+bR(D))(A)$$

dus $R(aC + bD) = aR(C) + bR(D)$.

b. Zij $C \in \ker(R)$. Dan is $R_C = O$ d.w.z. $R_C(A) = AC = O$ voor alle $A \in V$. I.h.b. is $R_C(I) = C = O$.

c. Als $R$ inverteerbaar is, dan is $R$ een vectorruimte-isomorfisme en dus zijn $V$ en $\mathcal{L}(V)$ isomorfe vectorruimten. Maar $\dim(V) = n < n^2 = \dim \mathcal{L}(V)$, tegenspraak.

Het is ook mogelijk om een tegenvoorbeeld te geven. Zo is de afbeelding $A \to CAC^{-1}$ voor een vaste (inverteerbare) $C \in V$ een afbeelding in $\mathcal{L}(V)$. Er is echter geen $D \in V$ zodanig dat $CAC^{-1} = AD$ voor alle $A \in V$. Immers $A = I$ nemen geeft $D = I$, maar i.h.a. is $CAC^{-1} \neq A$.

d. Laat $A, B, D \in V$. Dan is

$$(A, R_D(B)) = \mathrm{tr}(A^* R_D(B)) = \mathrm{tr}(A^*BD) = \mathrm{tr}(DA^*B) = \mathrm{tr}((AD^*)^*B) = (AD^*, B).$$

Maar dan is $(R_D)^*(A) = AD^* = R_{D^*}(A)$.

e. Laat $D \in V$ en $\lambda \in \mathbf{C}$. Dan geldt:

$\lambda$ is een eigenwaarde van $D \iff \det(D - \lambda I) = 0 \iff$ De matrix $D - \lambda I$ is niet-inverteerbaar $\iff$ er is een $A \in V, A \neq O$ zodanig dat $A(D - \lambda I) = O \iff$ er is een $A \in V$, $A \neq O$ zodanig dat $R_D(A) = \lambda A \iff \lambda$ is een eigenwaarde van $R_D$.