IX. Liegroepen en Lie-algebra's.

§9.1. Matrixgroepen.

Matrixgroepen zijn groepen van matrices met de matrixvermenigvuldiging als groepsbewerking. Het zijn ondergroepen van $GL(n,K)$ met $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$ (soms wordt ook een ander lichaam genomen). Een aantal matrixgroepen, zoals $GL(n,K), SL(n,K)$ en de orthogonale groep $O(n)$ zijn we al tegengekomen in hoofdstuk 8. De volgende constructie levert nog meer matrixgroepen:

Laat $(\ ,\ )$ een bilineaire vorm zijn op $\mathbf{R}^n$. Dan is er een matrix K zodanig dat $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T K \mathbf{y}$. K is inverteerbaar dan en slechts dan als de vorm niet-gedegenereerd is (een bilineaire vorm $(\ ,\ )$ op een vectorruimte V heet *gedegenereerd* als er een $\mathbf{x} \in V, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ bestaat zodanig dat $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ voor alle $\mathbf{y} \in V$). De matrices A waarvoor geldt dat $(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ voor alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, vormen een groep. In het geval van $K = I_n$ is dit de orthogonale groep $O(n)$, als $K = \operatorname{diag}(I_p, -I_q)$ is dit de *pseudo-orthogonale groep* $O(p,q)$. De doorsnede van $O(p,q)$ met $SL(n, \mathbf{R})$ heet de speciale pseudo-orthogonale groep $SO(p,q)$. Als $K = J_m := \begin{pmatrix} O & -I_m \\ I_m & O \end{pmatrix}$, is $n = 2m$ even en krijgen we de *reële symplectische groep* $Sp(m, \mathbf{R})$. Een groep $SSp(m, \mathbf{R})$ wordt niet onderscheiden omdat alle symplectische matrices determinant 1 hebben.

Laat $(\ ,\ )$ een sesquilineaire vorm op $\mathbf{C}^n$ zijn. Dan is $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^* K \mathbf{y}$ voor zekere matrix K. Als de vorm niet-gedegenereerd is, dan is K inverteerbaar en de matrices $A \in GL(n, \mathbf{C})$ zodanig dat $(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vormen een ondergroep van $GL(n, \mathbf{C})$. Als $K = I_n$, dan is dit de *unitaire groep* $U(n)$ en de speciale unitaire groep $SU(n)$ is $U(n) \cap SL(n, \mathbf{C})$. De complexe symplectische groep $Sp(m, \mathbf{C})$ bevat, analoog aan de reële symplectische groep, alle complexe $n \times n$-matrices A zodanig dat $A^T J_m A = J_m$ waarbij $m = n/2$. De doorsnede $Sp(m, \mathbf{C}) \cap U(n)$ heet de *symplectische groep* $Sp(m)$. (Soms wordt in de literatuur $Sp(2m, K)$ geschreven i.p.v. $Sp(m, K)$.)

De *Poincarégroep* $P(n)$ is de groep van transformaties $\mathbf{x} \to A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ in $\mathbf{R}^n$ met A orthogonaal en $\mathbf{b}$ een vector. Een trouwe representatie van $P(n)$ wordt geleverd door de $(n+1) \times (n+1)$-matrices van de vorm $\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$ met $A \in O(n)$.

De in de bovenstaande voorbeelden genoemde matrixgroepen hebben alle als eigenschap dat de elementen van de groep d.m.v. een eindig aantal continue parameters kunnen worden geparametriseerd. Zo wordt een matrix $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ uit $SO(2)$ door een enkele continue parameter θ geparametriseerd, voor $SO(n)$ zijn er $n(n-1)/2$ parameters nodig (zo kunnen matrices in $SO(3)$ m.b.v. de drie zgn. *Eulerhoeken* worden geparametriseerd). Matrixvermenigvuldiging en inverse nemen zijn differentieerbare afbeeldingen van de parameters. Dergelijke groepen heten n-parametergroepen of (eindig-dimensionale) *Liegroepen.* De parameters waarin de elementen van de groep worden uitgedrukt kunnen lokaal als coördinaten in een reële of complexe Euclidische ruimte worden gebruikt. De Liegroep is dus een differentieerbare variëteit met een groepsstructuur.

In de representatietheorie speelt de compactheid van groepen een grote rol. We tonen aan dat de groepen $U(n)$ en $SU(n)$ compact zijn; hetzelfde geldt voor $O(n)$ en $SO(n)$.

Beschouw de afbeelding $f : GL(n, \mathbf{C}) \to GL(n, \mathbf{C})$ gegeven door $f(A) = A^*A$. Deze afbeelding is continu (de matrixelementen van het product zijn polynomen in de coëfficiënten A_{ij} en hun complex geconjugeerden), en $U(n)$ is het inverse beeld van de gesloten verzameling $\{I_n\}$, dus is zelf gesloten. Verder is $U(n)$ begrensd, nl. Voor $A \in U(n)$ is $\sum_{i,j=1}^n |A_{ij}|^2 = n$. Verder is de afbeelding

$\det : GL(n, \mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ continu, en het inverse beeld van $\{1\}$ is de gesloten deelverzameling $SL(n, \mathbf{C})$ van $GL(n, \mathbf{R})$. Tenslotte is $SU(n) = SL(n, \mathbf{C}) \cap U(n)$ gesloten en begrensd en dus compact.

Infinitesimale transformaties. De groep $SO(2)$ is de groep van rotaties om de oorsprong in R^2. Zo'n rotatie kunnen we uitdrukken in termen van de componenten (x, y) van een vector in $\mathbf{R}^2$ als $\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$ waarbij (x', y') de componenten van de geroteerde vector zijn. Als we nu de hoek θ infinitesimaal klein nemen - we schrijven dan $\delta\theta$ - dan wordt de rotatie $\begin{cases} x' = x - y\delta\theta \\ y' = x\delta\theta + y \end{cases}$.
Dit is een *infinitesimale rotatie*. In termen van matrices wordt dit $\mathbf{x}' = (I + J\delta\theta)\mathbf{x}$ met $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Een (eindige) rotatie kan worden opgebouwd uit oneindig veel infinitesimale rotaties als volgt: zij $R(\theta)$ een rotatie om O over een hoek θ. Dan is

$$R(\theta) = (R(\theta/n))^n = \lim_{n\to\infty} (I + J\theta/n)^n = e^{J\theta}.$$

Hierbij is $e^A = I + A + A^2/2! + A^3/3! + \ldots$. Een direct bewijs dat de bovenstaande relatie inderdaad juist is gaat als volgt: merk eerst op dat $J^2 = -I$. Nu is

$$e^{J\theta} = I + \theta J + \frac{1}{2!}\theta^2 J^2 + \frac{1}{3!}\theta^3 J^3 + \ldots = I + \theta J - \frac{1}{2!}\theta^2 I - \frac{1}{3!}\theta^3 J = \cos\theta I + \sin\theta J = R(\theta).$$

Met behulp van de e-macht kunnen we eenvoudig aantonen dat $SO(2) \cong U(1)$: laat $\phi : U(1) \to SO(2)$ gegeven zijn door $\phi(e^{i\theta}) = e^{J\theta}$. ϕ is een isomorfisme.
Soortgelijke overwegingen gaan ook op voor andere Liegroepen. Zo is elke matrix A in $GL(n, \mathbf{R})$ met $\det(A) > 0$ te schrijven als $A = e^B$ met B een reële $n \times n$-matrix (maar niet als $\det(A) < 0$). Als $e^A = SO(n)$, dan is $e^{A^T} = (e^A)^T = (e^A)^{-1} = e^{-A}$ en dus is $A^T = -A$, m.a.w. de infinitesimale rotaties zijn antisymmetrische afbeeldingen. Omgekeerd volgt ook uit $A^T = -A$ dat e^A orthogonaal is en verder volgt uit $\det e^A = e^{\mathrm{tr}(A)}$ en uit het feit dat $\mathrm{tr}(A) = 0$ als A antisymmetrisch is, dat $\det e^A = 1$. In de opgaven zullen we het geval van $SO(3)$ nog wat verder uitdiepen.

We bekijken de structuur van de verzameling van infinitesimale transformaties van een continue matrixgroep. Merk op dat voor niet-commuterende matrices i.h.a. $e^A \cdot e^B \neq e^{A+B}$. Wel geldt

$$e^{tA} \cdot e^{tB} = e^{t(A+B) + t^2[A,B]/2 + O(t^3)} \qquad (t \to 0)$$

waarbij $[A, B] = AB - BA$ de commutator van A en B is. Volgens de stelling van Baker-Campbell-Hausdorff kunnen ook alle termen in de exponent van hogere orde worden uitgedrukt in termen van A, B en commutatoren (zoals $[A, B], [A, [A, B]]$). Zo zien we dat als A en B infinitesimale voortbrengers zijn, dan zijn ook $A + B$ en ook tA infinitesimale voortbrengers. Verder is, zoals uit de bovenstaande formule volgt, $e^{tA}e^{tB}e^{-tA}e^{-tB} = e^{t^2[A,B] + O(t^3)}$. Dus is $[A, B]$ een infinitesimale voortbrenger. De infinitesimale voortbrengers van een continue matrixgroep vormen een *Lie-algebra*.

Definitie: Een vectorruimte V over K heet een Lie-algebra indien op V een bewerking $[\ ,\ ] : V \times V \to V$, het Lie-haakje, is gedefinieerd zodanig dat de volgende eigenschappen gelden:
1. $[\lambda A + \mu B, C] = \lambda[A, C] + \mu[B, C]$
2. $[A, B] = -[B, A]$

3. $[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=O$
waarbij $A,B,C \in V$ en $\lambda, \mu \in K$. O is het nulelement van V. Uit eigenschap 1 en 2 volgt dat het Liehaakje bilineair is, m.a.w. ook geldt $[A, \lambda B+\mu C]=\lambda[A,B]+\mu[A,C]$. Eigenschap 3 heet de *Jacobi-identiteit.*

Als V de vectorruimte van reële of complexe $n \times n$-matrices is en $[\ ,\ ]$ is de commutator, dan is aan eigenschap 3 voldaan dus V heeft dan de structuur van een Lie-algebra. Omgekeerd bestaat de Lie-algebra $gl(n,\mathbf{R})$ van infinitesimale voortbrengers bij de groep $GL(n,\mathbf{R})$ uit alle $n \times n$-matrices. De reële antisymmetrische $n \times n$-matrices vormen de Lie-algebra $so(n)$. We bekijken als voorbeeld $g = so(3)$. Merk op eerst op dat de commutator van twee antisymmetrische matrices opnieuw antisymmetrisch is. Laat

$$J_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}, \quad J_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}, \quad J_3=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}. \tag{9.1}$$

Het is duidelijk dat J_1, J_2, J_3 de vectorruimte van de antisymmetrische matrices voortbrengen. Voor de commutatoren geldt verder: $[J_1,J_2]=J_3, [J_2,J_3]=J_1, [J_3,J_1]=J_2$, d.w.z. $[J_i,J_j]=\epsilon_{ijk}J_k$. Op een analoge wijze is een Lie-algebra g geheel bepaald door een basis $T_1,\ldots,T_n$ van de onderliggende vectorruimte en verder alle commutatierelaties $[T_i,T_j]=f_{ijk}T_k$ tussen de basisvectoren. De getallen f_{ijk} heten de *structuurconstanten* van g.

§**9.2. Liegroepen.**

In de vorige paragraaf hebben we een aantal voorbeelden van Liegroepen gezien in de vorm van n-parameter-matrixgroepen van continue transformaties. Bij zo'n Liegroep hoort een Lie-algebra van infinitesimale transformaties, die onder meer de structuur heeft van een vectorruimte van dimensie n. We gaan in deze paragraaf in op abstracte Lie-groepen en Lie-algebra's en noemen een aantal eigenschappen. Hierbij maken we gebruik van begrippen uit de differentiaalmeetkunde. We laten de meeste bewijzen, die vaak nogal lang of technisch zijn, achterwege, en zullen ons beperken tot het toelichten van de theorie aan de hand van matrixgroepen. We beginnen met de definitie van en Lie-groep.

Definitie: Een *Lie-groep* G is een differentieerbare variëteit voorzien van de structuur van een groep zo, dat de groepsbewerking $G \times G \to G$ en de afbeelding $G \to G$ gegeven door $g \to g^{-1}$ differentieerbaar zijn. Als de dimensie van G als variëteit n is, dan heet G een *n-parameter Lie-groep.*

Het feit dat een Lie-groep een dubbele structuur heeft wordt weerspiegeld in het karakter van de bijbehorende afbeeldingen. Zo is een Lie-groephomomorfisme $\phi : G \to G'$ niet alleen een groephomomorfisme tussen de Liegroepen G, G', maar ook een differenteerbare (dus C^∞-)afbeelding.

Voorbeeld: De Lie-groep $G = GL(n,\mathbf{R})$. De verzameling van reële $n\times n$-matrices $A=(A_{ij})$ kunnen we identificeren met de vectorruimte R^{n^2} waarbij de matrixelementen A_{ij} de coördinaten zijn. De determinant van de matrix A is een polynoom in de coördinaten A_{ij}, en de deelverzameling $U \in \mathbf{R}^{n^2}$ bestaande uit de $n \times n$-matrices met determinant ongelijk aan nul is een open deelverzameling van R^{n^2}, bestaande uit twee disjuncte samenhangende delen U_+ en U_- (welke zijn dit?) Op elke van deze twee delen is er een kaart met als coördinaten precies de coëfficiënten A_{ij}. G is dus een differentieerbare variëteit van dimensie n^2. De groepsstructuur van G wordt gegeven door matrixvermenigvuldiging. Omdat de matrixelementen van een product AB polynomen van de vorm $A_{ik}B_{kj}$ zijn, is de groepsbewerking differentieerbaar. Verder is $A^{-1} = \mathrm{adj}(A)/\det(A)$, waarbij $\mathrm{adj}(A)$ de getransponeerde van de matrix van cofactoren van de matrixelementen van A is. De coëfficiënten van $\mathrm{adj}(A)$ zijn dus polynomen in de coëfficiënten A_{ij}, evenals $\det(A)$ en dus is inverse nemen eveneens een differentieerbare operatie. $GL(n, \mathbf{R})$ is dus een n^2-parameter-Liegroep. Het eenheidselement e van G is de eenheidsmatrix I_n. Verder is de raakruimte T_AG gelijk aan de vectorruimte $\mathcal{M}(n \times n, \mathbf{R})$ van reële $n \times n$-matrices.

Beschouw de afbeelding $f : GL(n, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ gegeven door $f(A) = \det(A)$. f is differentieerbaar en de rang van de raakafbeelding $f_* : T_AGL(n, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ is overal gelijk aan 1. Het inverse beeld $SL(n, \mathbf{R}) = f^{-1}(1)$ is dus een (gesloten) deelvariëteit van $GL(n, \mathbf{R})$ (het inverse beeld van een gesloten verzameling onder een continue afbeelding is gesloten). $SL(n, \mathbf{R})$ is dus een Lie-groep; het is een *Lie-ondergroep* van $GL(n, \mathbf{R})$. De dimensie is $n^2 - 1$. (Een ondergroep H van een Liegroep G heet een Lie-ondergroep als H tevens een gesloten deelvariëteit van G is.)

De orthogonale groep $O(n)$ is een ondergroep van $GL(n, \mathbf{R})$. We tonen aan dat $O(n)$ een Lie-ondergroep is van $GL(n, \mathbf{R})$. $O(n)$ is het inverse beeld $f^{-1}(I)$ van de eenheidsmatrix onder de afbeelding $f : GL(n, \mathbf{R}) \to Sym^n$ gegeven door $f(A) = A^TA$, waarbij Sym^n de deelvariëteit van $\mathcal{M}(n \times n, \mathbf{R})$ (deze laatste is uiteraard diffeomorf met de Euclidische ruimte $\mathbf{R}^{n^2}$) is bestaande uit de symmetrische $n \times n$-matrices. De raakruimte T_BSym^n is voor alle $B \in Sym^n$ gelijk aan Sym^n. De raakafbeelding $f_* : T_AGL(n, \mathbf{R}) \to T_{A^TA}Sym^n$ wordt gegeven door $f_*(X) = X^TA + A^TX$. Zij $B \in Sym^n$; dan is $f_*(X) = B$ als $X = \frac{1}{2}(A^T)^{-1}B$. f_* is dus surjectief. $O(n)$ is dus een Lie-ondergroep van $GL(n, \mathbf{R})$ en de dimensie is gelijk aan $n^2 - \dim(Sym^n) = n(n-1)/2$.

De werking van een Lie-groep op een verzameling. Lie-groepen treden op als transformatiegroepen op een verzameling. Dit is bijvoorbeeld het geval bij de matrixgroepen die we eerder zijn tegengekomen en die werken als lineaire afbeeldingen op een vectorruimte. In het algemeen kan een Lie-groep werken op een differentieerbare variëteit:
1. $G = \mathbf{R}^n$ werkt als groep van translaties op $\mathbf{R}^n$: voor $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ is $g_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$.
2. Een ander voorbeeld is de werking van $SO(2)$ op de eenheidscirkel $S^1 \in \mathbf{R}^2$. In Voor $A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \in SO(2)$ is $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ een rotatie om O in $\mathbf{R}^2$, maar ook ligt het beeld $A\mathbf{x}$ van een punt $\mathbf{x} \in S^1$ in S^1. 3. Elke Lie-groep G werkt op zichzelf: voor $g, h \in G$ wordt de werking van G gegeven door $g(h) = gh$.

Voor $P \in M$ noteren we het beeld van P onder g als $g(P)$. Voor het eenheidselement e geldt dat $e(P) = P$ voor alle $P \in M$. Verder is $h(g(P)) = hg(P)$ voor $g, h \in G$. Als de Lie-groep G werkt op M, dan is de *baan* $G(P)$ van een punt $P \in M$ de verzameling van de beelden $\{g(P); g \in G\}$. De isotropiegroep G_P van P is de ondergroep $\{g \in G : g(P) = P\}$ van G, bestaande uit de elementen van G die P op zichzelf afbeelden. In het geval dat $G(P) = M$, zeggen we dat de groep *transitief* werkt op M.

Voorbeeld: In het geval van $G = SO(2)$ en $M = \mathbf{R}^2$, is de baan van een punt $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ de cirkel door $\mathbf{y}$ met middelpunt de oorsprong O. De baan van O bestaat alleen uit O. De isotropiegroep van een punt $P \neq O$ is $\{I_2\}$, voor $P = O$ is het geheel G.

De Lie-algebra van een Lie-groep. Zij G een n-parameter-Liegroep. We definiëren op G de *links-translatie* over $g \in G$ als de afbeelding $L_g : G \to G$ gegeven door $L_g(h) = gh$ (analoog kunnen we een rechts-translatie definiëren).

Een vectorveld X op G heet *links-invariant* als $(L_g)_*X_h = X_{gh}$ voor alle g, h. Uit het feit dat $(L_g)_* \circ (L_h)_* = (L_g \circ L_h)_*$ volgt dat een vectorveld X links-invariant is dan en slechts dan als $(L_g)_*X_e = X_g$ voor alle $g \in G$.

De verzameling links-invariante vectorvelden op G geven we aan met g. g heeft de structuur van een vectorruimte van dimensie n en is isomorf met de raakruimte T_eG aan G in het eenheidselement.

Immers aan $X \in T_eG$ kunnen we een uniek links-invariant vectorveld toevoegen: laat $X_e = X$ en $X_g = (L_g)_*X$. Omgekeerd, als X een links-invariant vectorveld is, dan is $X_e \in T_eG$. De afbeelding $\phi : g \to T_eG$ gegeven door $X \to X_e$ is een isomorfisme van vectorruimten. Er is echter nog een extra structuur: als $X, Y \in T_eG$, dan is ook $[X, Y] \in T_eG$ (vergelijk §7.7). Dit kunnen we voortzetten tot een links-invariant vectorveld $[X, Y]_g = (L_g)_*[X, Y]$. Nu volgt uit Propositie 7.4:

$$[(L_g)_*X, (L_g)_*Y] = (L_g)_*[X, Y]$$

en dus is

$$[X_g, Y_g] = [X, Y]_g$$

voor alle $g \in G$. Het Lie-haakje legt op T_eG en dus ook op g de structuur van een Lie-algebra, aangezien

$$[X, Y] = -[Y, X], \qquad [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = O.$$

Verder volgt dat $[\phi(X), \phi(Y)] = \phi([X, Y])$ dus de afbeelding ϕ is een *Lie-algebra-isomorfisme* en T_eG en g zijn isomorfe Lie-algebra's. g heet de *Lie-algebra behorend bij de Lie-groep* G.

Voorbeelden: 1. Laat $G = \mathbf{R}^n$, de translatiegroep werkend op $\mathbf{R}^n$. Het eenheidselement is de nulvector $\mathbf{0}$ en als $x^1, \ldots, x^n$ de coördinaten van een vector t.o.v. de standaardbasis zijn, dan is $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ een basis van T_eG. Verder is, voor $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$, $L_\mathbf{a}\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{x}$ en $L_\mathbf{a}\frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}$. De vectorvelden $X = c^j\frac{\partial}{\partial x^j}$ voor $c^j \in \mathbf{R}$ zijn dus de links-invariante vectorvelden en dus is g als vectorruimte isomorf met $\mathbf{R}^n$. Tenslotte is voor $X, Y \in g$, $[X, Y] = 0$. De Lie-algebra g is *abels* (of commutatief).

2. Laat $G = GL(n, K)$ met $K = \mathbf{R}$ of $K = \mathbf{C}$. Het eenheidselement is I_n. Kies rond I_n een kaart met coördinaten de matrixelementen x_{ij}. Voor een willekeurige $n \times n$-matrix X laat $X(t) = I_n + tX \in G$ voor $|t|$ voldoende klein, dan is $X(0) = I_n$ en $X'(0) = X$, m.a.w. $X \in T_eG$. Omgekeerd is iedere gladde kromme door I_n van de vorm $\gamma(t) = X(t) = (X_{ij}(t))$ met $X(0) = I_n$, $X'(0) = X'_{ij}(0)E_{ij}$ met E_{ij} de matrix met $(E_{ij})_{k\ell} = \delta_{ik}\delta_{j\ell}$. Dus T_eG is gelijk aan de vectorruimte van $n \times n$-matrices. Het Lie-haakje komt overeen met de commutator van twee matrices. De Lie-algebra geven we aan met $gl(n, K)$.

3. Laat $G = O(n)$. G bestaat uit twee samenhangende delen, de matrices met determinant 1 - deze vormen de ondergroep $SO(n)$ - en de matrices met determinant -1. Het eenheidselement zit in de component $SO(n)$. De Lie-algebra van $O(n)$ en die van $SO(n)$ zijn dus dezelfde. Laat een gladde kromme $X(t) = (X_{ij}(t))$ door I_2 gegeven zijn, $X(0) = I_2$. Nu is $X(t)^TX(t) = I_2$ en $0 = X'(t)^TX(t) + X(t)^TX'(t)$; voor $t = 0$ geeft dit $X'(0)^T = -X'(0)$. De raakruimte T_eG bestaat dus uit antisymmetrische matrices; omgekeerd beschouw, voor $A = -A^T$, de kromme $X(t) = e^{tA}$. Deze ligt geheel in G: $(e^{tA})^T = e^{tA^T} = e^{-tA} = (e^{tA})^{-1}$. Verder is $X(0) = I_2$ en $X'(0) = A$. De Lie-algebra $so(n)$ wordt gevormd door de antisymmetrische $n \times n$-matrices en deze heeft dimensie $n(n-1)/2$. Dit is dus ook de dimensie van $G = SO(n)$.

Beschouw nu de Liegroep $G = GL(n, K)$ met $K = \mathbf{R}$ of $\mathbf{C}$. We bepalen de links-invariante vectorvelden op G. Deze verkrijgen we door een willekeurige matrix $X \in T_eG$ te nemen; voor $g \in G$ is dan $X_g = (L_g)_*X$. Neem $X = E_{ij}$; dit komt overeen met de raakvector $\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$. Laat $f : G \to \mathbf{R}$ een C^∞-functie zijn. Nu is

$$(L_g)_*(X)_g(f) = X_e(f \circ g) = \frac{\partial}{\partial x_{ij}}f((gx)) = \sum_{k,\ell=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial(g_{km}x_{m\ell})}{\partial x_{ij}}\frac{\partial f}{\partial x_{k\ell}}\Big|_g = \sum_{k=1}^{n} g_{ki}\frac{\partial f}{\partial x_{kj}}\Big|_g$$

en omdat $E_{k\ell} = \frac{\partial}{\partial x_{k\ell}}\Big|_g$ is, vinden we

$$(L_g)_*(E_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} g_{ki} E_{kj} = gE_{ij}$$

De linksgetransleerde van X over g is dus gelijk aan $(L_g)_*(X) = gX$. De linksinvariante vectorvelden op $GL(n, K)$ zijn dus van de vorm $X_g = gX_e$.

De exponentiële afbeelding. Laat $G = GL(n, K)$ met $K = \mathbf{R}$ of $\mathbf{C}$. Laat X een linksinvariant vectorveld zijn, dus $X_g = gX_e$. Beschouw voor $t \in \mathbf{R}$ en $g_0 \in G$ de kromme $\gamma(t) = g_0 \exp(tX_e)$. γ is een gladde kromme op G, verder is $\gamma(0) = g_0$ en $\gamma'(t) = \gamma(t)X_e$. M.a.w., $f_t(g_0) = \gamma(t)$ is de stroming van het vectorveld X door g_0. Op deze wijze is de exponentiële afbeelding te generaliseren naar een willekeurige Lie-groep.

Zij G een Lie-groep met Lie-algebra g. Laat $X \in g$ en laat f_t de stroming van het vectorveld X zijn, dus $f_0(e) = e$ en $\dfrac{df_t(e)}{dt} = X_{f_t(e)}$ voor $|t| < \epsilon$. Laat nu $|t|, |u| < \epsilon/2$. Dan is

$$f_{t+u}(e)\Big|_{t=0} = f_u(e), \quad \frac{d}{dt} f_{t+u}(e) = \frac{d}{d\tau} f_\tau(e)\Big|_{\tau=t+u} = X(f_{t+u}(e)),$$

m.a.w. $f_{u+t}(e)$ is de stroming van het vectorveld X door $f_u(e)$. Maar dan is $f_{u+t}(e) = f_t(f_u(e))$. Definieer nu de exponentiële afbeelding $\exp : g \to G$ d.m.v.

$$\exp(tX_e) = f_t(e).$$

Zij verder $g = f_u(e)$. Dan is

$$\frac{d}{dt}(gf_t(e)) = \frac{d}{dt}(L_g \circ f_t) = (L_g)_* \frac{d}{dt} f_t(e) = (L_g)_* X_{f_t(e)} = X_{gf_t(e)},$$

en $gf_0(e) = g = f_0(g)$. M.a.w., de stroming van het links-invariante vectorveld X door $g = f_u(e)$ is enerzijds $f_t(g) = f_{u+t}(e)$ en anderzijds $gf_t(e) = f_u(e)f_t(e)$. We zien dus dat

$$\exp(uX)\exp(tX) = \exp((u + t)X). \tag{9.2}$$

Nu is $\exp(tX)$ voor elke t te definiëren d.m.v. $\exp(tX) = (\exp(tX/n))^n$ voor n geheel. Voor elke $X \in g$ is $\{\exp(tX) : t \in \mathbf{R}\}$ dus een *1-parameter-ondergroep* van G.

Het belang van de exponentiële afbeelding wordt ontleend aan de volgende stelling:

Stelling 9.1: Zij G een Lie-groep met Lie-algebra g. Dan is $\exp : g \to G$ in 0 een lokaal diffeomorfisme, d.w.z. een diffeomorfisme tussen een open omgeving van $0 \in g$ en een open omgeving van $e \in G$.

Gevolg 9.2: Twee Lie-groepen met dezelfde Lie-algebra's zijn lokaal diffeomorf.

Opmerkingen: 1. De raakruimten T_eG en T_eg zijn beide op kanonieke wijze isomorf met g. De raakafbeelding $\exp_* : T_eg \to T_eG$ in e is de identieke afbeelding (ga dit na voor het geval dat G een matrix-Liegroep is).

2. Als de groep G samenhangend en compact is, dan is de expontiële afbeelding surjectief.

3. De Liegroepen $G = \mathbf{R}_+^*$ (met de vermenigvuldiging als groepsstructuur) en $G' = U(1) = \{e^{it}; t \in \mathbf{R}\}$ zijn niet homeomorf ($U(1)$ is compact, $\mathbf{R}_+^*$ niet) maar hebben dezelfde Lie-algebra (er is maar één Lie-algebra van dimensie 1); als de Lie-algebra wordt voortgebracht door $E = 1$ dan wordt in het geval van G en G' de exponentiële afbeelding gegeven door $\exp(tE) = e^t$ resp. $\exp(tE) = e^{it}$.

Uit stelling 9.1 volgt dat we het lokale gedrag van een Lie-groep kunnen bestuderen door de Lie-algebra te bekijken. Doordat de Lie-algebra een lineaire structuur heeft, is de studie hiervan eenvoudiger dan van de Lie-groep zelf. Ditzelfde geldt ook voor het bestuderen van representaties van de Lie-groep, zoals we verderop zullen zien. We zullen eerst de structuur van Lie-algebra's nader bestuderen.

§**9.3. Structuur van Lie-algebra's.**

We herhalen nogmaals de definitie van een Lie-algebra:

Een Lie-algebra g is een vectorruimte over een lichaam K met een extra operatie, het Lie-haakje $[\ ,\ ] : g \times g \to g$ dat de volgende eigenschappen heeft:

1. $[aA + bB, C] = a[A, C] + b[B, C]$.
2. $[A, B] = -[B, A]$.
3. $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]]$.

Hierbij is $A, B, C \in g$ en en $a, b \in K$. Eigenschap 3 heet de *Jacobi-identiteit.*

Voorbeelden: 1. De vectorruimte $V = K^n$ met als Lie-haakje $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$ voor alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$.

2. De Lie-algebra $gl(n, K)$ van $n \times n$-matrices met als Lie-haakje de commutator van twee matrices $[A, B] = AB - BA$. Een basis wordt gegeven door de matrices E_{ij} met $(E_{ij})_{k\ell} = \delta_{ik}\delta_{j\ell}$.

3. Zij V een vectorruimte. De verzameling van lineaire afbeeldingen $T : V \to V$ vormt een vectorruimte $\mathcal{L}(V)$. De commutator $[S, T]$ van $S, T \in \mathcal{L}(V)$ is gedefinieerd als $[S, T] = S \circ T - T \circ S$. Hiermee wordt $\mathcal{L}(V)$ een Lie-algebra. We geven deze ook aan met $gl(V)$.

4. De Lie-algebra $sl(n, K)$ van $n \times n$-matrices met spoor 0 en $[A, B] = AB - BA$ is een Lie-algebra; het is een *Lie-deelalgebra* van $gl(n, K)$.

5. De Lie-algebra $so(n)$ van de antisymmetrische $n \times n$-matrices met als Lie-haakje de commutator.

6. De vectorruimte $\mathbf{R}^3$ met als Lie-haakje het uitwendig product: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Als Lie-algebra is deze isomorf met $so(3)$.

7. De *Pauli-matrices* zijn de matrices

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Er geldt $[i\sigma_i, i\sigma_j] = -2\epsilon_{ijk} i\sigma_k$. De matrices $i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3$ brengen een Lie-algebra van dimensie 3 voort. Deze Lie-algebra is $su(2)$, de Lie-algebra van (complexe) antihermitese 2×2-matrices met spoor 0.

8. De *Heisenbergalgebra* is de Lie-algebra van dimensie 3 voortgebracht door X, Y, Z met commutatierelaties

$$[X, Y] = Z,\ [X, Z] = O,\ [Y, Z] = O.$$

9. Zij M een Riemannse variëteit. De Killingvectorvelden op M vormen een Lie-algebra met als Lie-haakje de commutator $[X, Y]$ van vectorvelden.

Lie-algebra's treden op als infinitesimale transformaties bij een Lie-groep. Dit leidt tot een representatie in termen van differentiaaloperatoren. Zo is de Lie-algebra $so(3)$ isomorf met de Lie-algebra van differentiaaloperatoren $x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$, $y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}$, $z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}$. We beschouwen alleen het eindig-dimensionale geval. Laat g een Lie-algebra zijn. Omdat g ook de structuur van een vectorruimte heeft, is er een basis $X_1, \ldots, X_n$. De structuur van de Lie-algebra ligt geheel vast als we de commutatoren van de basiselementen kennen. Deze kunnen we uitdrukken als

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k X_k.$$

De getallen c_{ij}^k heten de *structuurconstanten* van g. Uit eigenschap 2 en 3 volgt dat

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k, \qquad \sum_{\ell=1}^{n} c_{jk}^{\ell} c_{i\ell}^m + c_{ki}^{\ell} c_{j\ell}^m + c_{ij}^{\ell} c_{k\ell}^m = 0. \tag{9.3}$$

Nu volgt een aantal definities:

Definities: Zij g een Lie-algebra. Een *Lie-deelalgebra* h van g is een niet-lege lineaire deelruimte zodanig dat $[x, y] \in h$ als $x, y \in h$. Een Lie-deelalgebra h heet een *ideaal* als voor elke $x \in g$ en $y \in h$ geldt dat $[x, y] \in h$. Het *centrum* $z(g)$ is het ideaal bestaande uit alle $x \in g$ zodanig dat $[x, y] = 0$ voor alle $y \in g$. Een Lie-algebra heet *abels* of *commutatief* als $z(g) = g$.

De Lie-algebra g heet *simpel* als g geen echte idealen heeft. De Lie-algebra g heet semi-simpel als g geen abelse idealen heeft.

Voorbeeld: De Lie-algebra's $sl(n, K), so(n), su(n)$ zijn simpel. De Lie-algebra $gl(n, K)$ is niet semi-simpel. De matrices λI zijn bevat in het centrum z; z is een abels ideaal en $gl(n, K) = sl(n, K) \oplus z$. Net zo is $u(n) = su(n) \oplus u(1)$. De directe som is hierbij als volgt gedefinieerd:

Definitie: Een Lie-algebra g is de *directe som* $g = g_1 \oplus \ldots \oplus g_n$ van deelalgebra's $g_1, \ldots, g_n$ als elke $X \in g$ op precies één manier kan worden geschreven als lineaire combinatie $X = X_1 + \ldots + X_n$. met $X_i \in g_i$ en bovendien geldt dat als $X \in g_i, Y \in g_j$ en $i \neq j$, dan is $[X, Y] = O$. I.h.b. volgt hieruit dus dat de deelalgebra's g_i zelfs idealen van g zijn.

We bepalen alle Lie-algebra's van dimensie 2. Laat X, Y een basis zijn van g. Dan is $[X, Y] = cX + dY$. Als $c = d = 0$, dan is g abels en isomorf met K^2. In het andere geval neem aan dat $d \neq 0$. Dan kunnen we Y vervangen door $Z = cX + dY$. Dan is $[X, Z] = dZ$. Laat $W = X/d$. Dan is $[W, Z] = Z$. Deze Lie-algebra is isomorf met de Lie-algebra behorende bij de Lie-groep van affiene transformaties $x \to ax + b$ (met $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$) of de Lie-algebra voortgebracht door de matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Voorbeeld: De Lie-algebra's $o(p, q)$ en $p(p, q)$.

Zoals we hebben gezien is de Lie-groep $O(p, q)$ de groep van $n \times n$-matrices A (met $n = p + q$ zodanig dat $A^T K A = K$ met $K = \mathrm{diag}(I_p, -I_q)$. De Lie-algebra $o(p, q)$ kunnen we vinden door infinitesimale transformaties in de Lie-groep te beschouwen: als $X \in o(p, q)$ dan is $\exp(tX) \in O(p, q)$. Neem nu $t = \epsilon$ klein, dan is

$$K = (\exp(\epsilon X))^T K (\exp(\epsilon X)) = (I + \epsilon X + O(\epsilon^2))^T K (I + \epsilon X + O(\epsilon^2))$$

en door naar de term van orde ϵ te kijken zien we dat $X^T K + KX = O$. Dit levert voor de matrixelementen $X_{ji}\eta_{jj} = -\eta_{ii}X_{ij}$, waarbij we schrijven $\eta_{ij} = K_{ij}$. Een basis van de Lie-algebra wordt dus gegeven door $M_{ij} = \eta_{ii}E_{ij} - \eta_{jj}E_{ji}$ met $i < j$.

De Poincaré-groep $P(p,q)$ is de groep van $(n+1)\times(n+1)$-matrices van de vorm $\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$ met $A \in O(p,q)$ en $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$. De voortbrengers van de Lie-algebra $p(p,q)$ zijn dus enerzijds de matrices $M_{ij} = \eta_{ii}E_{ij} - \eta_{jj}E_{ji}$ (waarbij $1 \le i,j \le n$) en anderzijds de n matrices $P_k = \begin{pmatrix} O & \mathbf{e}_k \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{pmatrix}$. Het Lie-haakje wordt gegeven door de commutatierelaties

$$[M_{ij}, M_{k\ell}] = \eta_{jk}M_{i\ell} - \eta_{j\ell}M_{ik} + \eta_{i\ell}M_{jk} - \eta_{ik}M_{j\ell},\ [M_{ij}, P_k] = \eta_{ii}\delta_{jk}P_i - \eta_{jj}\delta_{ik}P_j,\ [P_i, P_j] = O.$$

De matrices M_{ij} vormen dus een Lie-deelalgebra (isomorf met) $o(p,q)$, de matrices P_k brengen een (abels) ideaal voort. Het centrum van de beide Lie-algebra's is $\{O\}$.

De geadjungeerde representatie, de Killingvorm.

Defi nitie: Laat g, h Lie-algebra's zijn. Een afbeelding $\psi : g \to h$ heet een *Lie-algebrahomomorfisme* als ψ lineair is en als voor $X, Y \in g$

$$\psi([X,Y]) = [\psi(X), \psi(Y)].$$

Als $h = gl(V)$ voor zekere Hilbertruimte V dan heet ψ een *representatie* van g.

Definitie: Zij g een Lie-algebra. Een *derivatie* op g is een afbeelding $D \in gl(g)$ zodanig dat voor $X, Y \in g$ geldt dat

$$D([X,Y]) = [D(X), Y] + [X, D(Y)].$$

De derivaties in $gl(g)$ vormen een Lie-deelalgebra $\mathrm{Der}(g)$ van $gl(g)$.

De *geadjungeerde representatie* ad:$g \to gl(g)$ beeldt $X \in g$ af op $\mathrm{ad}_X : g \to g$ waarbij

$$\mathrm{ad}_X(Y) = [X,Y] \quad \text{voor } Y \in g.$$

Uit de Jacobi-identiteit volgt dat ad_X een derivatie is op g. Verder is voor $a, b \in \mathbf{R}$

$$\mathrm{ad}_{aX+bY} = a\ \mathrm{ad}_X + b\ \mathrm{ad}_Y$$

en

$$\mathrm{ad}_{[X,Y]} = \mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y - \mathrm{ad}_Y \circ \mathrm{ad}_X.$$

ad is een *Lie-algebrahomomorfisme* en dus inderdaad een representatie van g. Bovendien volgt dat $\mathrm{ad}(g) = \{\mathrm{ad}_X : X \in g\}$ een deelalgebra van $\mathrm{Der}(g)$ en dus van $gl(g)$ is.

De *Killingvorm* is de bilineaire symmetrische vorm (,) gedefinieerd door

$$(X,Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y) \qquad \text{voor } X, Y \in g.$$

Voor de Killingvorm geldt bovendien dat (voor $X, Y, Z \in g$)

$$(X, [Y,Z]) = ([X,Y], Z). \tag{9.4}$$

De Killingvorm is i.h.a. geen inwendig product, zo is de Killingvorm identiek nul als de Lie-algebra abels is. Echter geldt:

Stelling 9.3 Een Lie-algebra g is semisimpel dan en slechts dan als de Killingvorm niet-gedegenereerd is.

Gevolg 9.4: Een eindig-dimensionale semi-simpele Lie-algebra s is de directe som van simpele deelalgebra's $s = g_1 \oplus \ldots \oplus g_r$ en als $X_i \in g_i, X_j \in g_j$, dan is $(X_i, X_j) = 0$.

Bewijs: Zij s semisimpel. Als s geen echte idealen heeft, dan zijn we klaar. Stel t is een echt ideaal van s; we kunnen aannemen dat t simpel is. Laat $t^\perp$ het orthogonaal complement zijn t.o.v. de Killingvorm. Uit (9.4) volgt dat $t^\perp$ ook een ideaal van g is. Dan is $t \cap t^\perp$ een ideaal en omdat t simpel is, is het gelijk aan t of $\{0\}$. Het eerste geval impliceert dat de Killingvorm op t gedegenereerd is, in tegenspraak met stelling 9.3. Dus is $t \cap t^\perp = \{O\}$. Als nu $X \in t$ en $Y \in t^\perp$, dan is $[X, Y] \in t \cap t^\perp$ en dus is $[X, Y] = O$ en dus is $g = t \oplus t^\perp$. Door hetzelfde argument nu (herhaald) op $t^\perp$ toe te passen, volgt het resultaat. $\diamond$

De Lie-algebra van een compacte Liegroep. Als een Lie-groep G compact is en eindig-dimensionaal, dan is deze isomorf met een ondergroep van $U(n)$ voor zekere n. De Lie-algebra g van G bestaat uit antihermitese matrices; voor het standaard inwendig product $\langle X, Y\rangle = \operatorname{tr}(X^*Y)$ op $\mathcal{M}(n \times n, \mathbf{C})$ geldt dan

$$-\langle \mathrm{ad}_Z(X), Y\rangle = \langle [X, Z], Y\rangle = \operatorname{tr}(XZY - ZXY) = \operatorname{tr}(XZY - XYZ) = \langle X, [Z, Y]\rangle = \langle X, \mathrm{ad}_Z(Y)\rangle$$

en dus is ad_Z antisymmetrisch voor elke $Z \in g$. Voor de Killingvorm op g geldt dan

$$(X, X) = \operatorname{tr}(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_X) = -\operatorname{tr}\big((\mathrm{ad}_X)^T \mathrm{ad}_X\big);$$

de Killingvorm is dus negatief-semidefiniet.

Laat nu $X_1, \ldots, X_m$ een (vectorruimte-)basis van g zijn. Omdat ad_X antisymmetrisch is voor elke $X \in g$, is $(\ker(\mathrm{ad}_X))^\perp = \operatorname{im}(\mathrm{ad}_X)$ (t.o.v. het bijbehorende inproduct). Laat $U_i = \ker(\mathrm{ad}_{X_i})$ en $W_i = \operatorname{im}(\mathrm{ad}_{X_i}) = U_i^\perp$. Zij $z = U_1 \cap \ldots \cap U_m$. Dan is $z = \{X \in g : \mathrm{ad}_X = 0\}$ het centrum van g. Verder is $X \in z$ precies dan als $(X, Y) = 0$ voor alle $Y \in g$. Zij $s = W_1 + \ldots + W_m$. Dan $X \in s$ dan en slechts dan als $X = [X_1, Y_1] + \ldots + [X_m, Y_m]$ voor zekere $Y_1, \ldots, Y_m \in g$, m.a.w. $s = [g, g]$, de Lie-deelalgebra die wordt voortgebracht door alle "commutatoren" $[X, Y]$. z en s zijn idealen van g en verder is

$$z = U_1 \cap \ldots \cap U_m = (W_1 + \ldots + W_m)^\perp = s^\perp$$

dus

$$g = z \oplus [g, g].$$

Verder is $s = [g, g]$ semisimpel en de Killingvorm is negatief-definiet op s. We hebben dus aangetoond:

Propositie 9.5: De Lie-algebra g van een compacte Liegroep is de directe som $z \oplus [g, g]$ van zijn centrum en de semisimpele Lie-deelalgebra $[g, g]$.

Op grond hiervan definiëren we:

Definitie: Een reële semisimpele Lie-algebra g heet *compact* als de Killingvorm op g negatief-definiet is. Een Lie-algebra die de directe som is van zijn centrum en een semisimpele Lie-algebra heet *reductief*.

Zij g een reële semisimpele compacte Lie-algebra. Omdat de Killingvorm negatief-definiet is, is deze (op teken na) een inwendig product. Er bestaat dan een orthonormale basis $\{X_1, \ldots, X_n\}$ van g t.o.v. de Killingvorm, d.w.z. $-\delta_{ij} = (X_i, X_j)$. Nu is $[X_i, X_j] = \sum_{m=1}^{n} c_{ij}^{m} X_m$, waarbij c_{ij}^{k} de structuurconstanten zijn. Schrijf $c_{ij}^{k} = c_{ijk}$. Dan volgt uit

$$c_{ijk} = ([X_i, X_j], X_k) = (X_i, [X_j, X_k]) = c_{jki}.$$

Verder geldt vanwege $[X_i, X_j] = -[X_j, X_i]$ dat $c_{ijk} = -c_{jik}$. We hebben dus aangetoond:

Propositie 9.6: Zij g een semisimpele compacte Lie-algebra. Dan bestaat er een basis van g zodanig dat de structuurconstanten t.o.v. deze basis volledig antisymmetrisch zijn.

Voor een willekeurige basis $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ geldt

$$g_{ij} = (Y_i, Y_j) = \sum_{k,\ell=1}^{n} c_{ik}^{\ell} c_{j\ell}^{k}. \tag{9.5}$$

De g_{ij} heten de componenten van Cartans metrische tensor. De matrix (g_{ij}) is negatief-definiet.

Voorbeeld: Laat $g = so(3)$. Een basis voor g wordt gevormd door de matrices $J_1 = -M_{23}, J_2 = -M_{31}, J_3 = -M_{12}$ (zie (9.1)). Voor de commutatierelaties geldt $[J_i, J_j] = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_{ijk} J_k$. De structuurconstanten zijn dus $c_{ij}^{k} = \epsilon_{ijk}$. Cartans metrische tensor is $g_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=1}^{3} c_{ik}^{\ell} c_{j\ell}^{k} = -2\delta_{ij}$. I.h.b. is $so(3)$ semisimpel. Het is eenvoudig na te gaan dat $so(3)$ zelfs simpel is.

Opmerking: Zij g de Lie-algebra van een (eindig-dimensionale) compacte Lie-groep. Uit Gevolg 9.4 en Propositie 9.5 volgt dat g een directe som is van een abelse deelalgebra z en een aantal simpele deelalgebra's. Een eindig-dimensionale reële abelse Lie-algebra is isomorf met $u(1)^n$ (d.w.z. $\mathbf{R}^n$ met $[X, Y] = O$). Door het lichaam van scalairen uit te breiden tot $\mathbf{C}$ verkrijgen we de *complexificatie* $k_{\mathbf{C}} = k \oplus ik$ van een reële Lie-algebra k. De complexe eindig-dimensionale simpele Lie-algebra's zijn door Killing en Cartan volledig geclassificeerd: er zijn vier oneindige reeksen genaamd A_n, B_n, C_n en D_n. Dit zijn de (gecomplexificeerde) Lie-algebra's van resp. $su(n), so(2n+1), sp(2n)$ en $so(2n)$. De index n geeft de rang aan. Verder zijn er vijf *exceptionele* Lie-algebra's G_2, F_4, E_6, E_7 en E_8 met dimensies 14, 52, 78, 133 resp. 248. Nu bestaat er bij elk van deze Lie-algebra's g een unieke samenhangende en enkelvoudig-samenhangende compacte Liegroep G die g als Liegroep heeft. Elke samenhangende Liegroep G' die g als Lie-algebra heeft is dan het quotiënt van G met een discrete (en dus eindige) ondergroep van G. G heet de *universele overdekking* van G'. In het geval van de Lie-algebra's A_n, B_n, C_n, D_n is G isomorf met de groepen $SU(n)$, $Spin(2n+1)$, $Sp(2n)$, resp. $Spin(2n)$. De orthogonale groepen $SO(n)$ zijn zelf niet enkelvoudig-samenhangend maar quotiënten van de spingroepen $Spin(n)$.

Opmerking: Zij g een willekeurige eindig-dimensionale Lie-algebra. De afgeleide algebra $Dg = [g, g]$ is het ideaal van g dat wordt voortgebracht door de commutatoren $[X, Y]$ met $X, Y \in g$. De *derived series* is de rij $g \supset Dg \supset D^2 g \supset \ldots$, waarbij $D^1 g = Dg$ en $D^{n+1} g = D(D^n g)$ voor $n > 0$. g heet *oplosbaar* als $D^m g = \{0\}$ voor zekere $m > 0$. Laat nu a, b oplosbare idealen zijn in g. Dan is de som $a + b = \{X \in g : X = A + B \text{ met } A \in a, B \in b\}$ eveneens een oplosbaar ideaal. Er bestaat dus een grootste oplosbaar ideaal. Dit heet het *radicaal* $\mathrm{Rad}(g)$ van g. De Lie-algebra g is semisimpel dan en slechts dan als zijn radicaal nul is. I.h.b. volgt dat de quotiënt-algebra $g/\mathrm{Rad}(g)$ semisimpel is. Volgens de stelling van Levi bestaat er een semisimpele deelalgebra s van g zodanig dat $s \cap \mathrm{Rad}(g) = \{0\}$ en $g = s + \mathrm{Rad}(g)$. Merk op dat s geen ideaal van g hoeft te zijn, zodat de som i.h.a. geen directe som is; we spreken van een *semi-directe som.* In het geval dat g de Lie-algebra is van een compacte Lie-groep, is het radicaal dus gelijk aan het centrum van g.

§9.4. Representaties van compacte Lie-groepen.

In dit hoofdstuk zullen we zonder bewijs een aantal resultaten noemen m.b.t. de representaties van compacte Lie-groepen.

Definitie: Zij G een Lie-groep. Een representatie van G op een Hilbertruimte V is een homomorfisme $\phi : G \to GL(V)$. Een representatie van een Lie-algebra g is een Lie-algebrahomomorfisme $\psi : g \to gl(V)$. V heet de *representatieruimte* en $\dim(V)$ heet de dimensie van de representatie. Verder heten twee representaties op V ϕ_1, ϕ_2 *equivalent* als er een (vaste) $f \in GL(V)$ bestaat zodanig dat voor elke $g \in G$ geldt dat $\phi_1(g) = f \circ \phi_2(g) \circ f^{-1}$. Een representatie$\phi : G \to GL(V)$ heet *unitair* als $\phi(g)$ unitair is voor alls $g \in G$.

We noemen nu zonder bewijs een aantal resultaten.

Propositie 9.7 (*lemma van Schur:*) Zij G een Lie-groep. Een unitaire representatie $\phi : G \to GL(V)$ is irreducibel dan en slechts dan als de enige operatoren in $GL(V)$ die commuteren met alle $\phi(g)$, $g \in G$ scalaire veelvouden van de eenheidsoperator id_V zijn.

Stelling 9.8: Zij G een compacte Liegroep en $\phi : G \to GL(V)$ een representatie van G. Dan bestaat er een inproduct (,) op V zodanig dat ϕ een unitaire representatie is, d.w.z. $(u, v) = (\phi(g)u, \phi(g)v)$ voor $u, v \in V$ en $g \in G$.

Stelling 9.9: Iedere irreducibele unitaire representatie van een compacte Lie-groep is eindig-dimensionaal.

Stelling 9.10: Iedere unitaire represenatie van een compacte Lie-groep is de directe som van irreducibele eindig-dimensionale representaties.

Gevolg 9.11: Compacte Lie-groepen zijn d.m.v. matrices te representeren.

Tenslotte noemen we de stelling van *Peter-Weyl:*

Stelling 9.12 Zij G een compacte Lie-groep. Dan vormen de functies $\sqrt{n_\alpha}\phi_{ij}^{(\alpha)}(g)$, waarbij $\phi^{(\alpha)}$ de irreducibele unitaire represenaties van G doorloopt, n_α de dimensie van $\phi^{(\alpha)}$ is en $\phi_{ij}(g)$ voor $i, j = 1, \dots, n_\alpha$ de matrixelementen van $\phi(g)$ zijn, een orthonormale basis van de Hilbertruimte $L_2(G)$ van kwadratische integreerbare functies op de Liegroep G.

Opmerking: Zoals we zien gaan veel resultaten die gelden voor eindige groepen ook op voor compacte Liegroepen. De bewijzen verlopen grotendeels analoog, maar i.p.v. sommatie over de groepselementen wordt over de Lie-groep geïntegreerd. De integraal over een Liegroep is gedefinieerd d.m.v. de *Haarmaat* dg en als de Liegroep compact is, is de integraal van een continue functie $f : G \to \mathbf{C}$ over G eindig. Verder geldt dat $\int_G f(g)dg = \int_G f(hg)dg$ voor $h \in G$.

Voorbeeld: De Haarmaat op $G = U(1) = \{e^{i\theta}; \theta \in \mathbf{R}\}$ wordt gegeven door $d\theta$: voor $f : G \to \mathbf{C}$ continu is $\int_G f(g)dg = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\theta$. $d\theta$ is inderdaad links-invariant: voor $h = e^{i\alpha} \in U(1)$ is

$$\int_{U(1)} f(g)dg = \int_0^{2\pi} f(e^{i\alpha}e^{i\theta})d\theta = \int_0^{2\pi} f(e^{i(\alpha+\theta)})d\theta = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\theta = \int_{U(1)} f(hg)dg.$$

De irreducibele representaties van $U(1)$**.** Laat $G = U(1)$ en ϕ een irreducibele unitaire representatie zijn. Omdat $U(1)$ abels is, commuteren alle $\phi(g)$ met $g \in G$ met elkaar. Volgens het lemma van Schur zijn alle $\phi(g)$ van de vorm $\lambda(g)id_V$ met $\lambda(g) \in \mathbf{C}$. Omdat id_V elke eendimensionale lineaire deelruimte invariant laat, is $\dim(V) = 1$, dus $\phi(g) = \lambda(g)$. Uit $\phi(g)^*\phi(g) = id_V$ en $\phi(g)\phi(h) = \phi(gh)$ volgt dat $|\lambda(g)| = 1$ en dus is $\lambda(e^{i\theta}) = e^{i\alpha\theta}$ voor zekere $\alpha \in \mathbf{R}$. Tenslotte volgt uit het feit dat $\lambda(e^{2\pi i}) = 1$, dat $\alpha \in \mathbf{Z}$. De irreducibele unitaire representaties van $U(1)$ zijn dus $\phi^{(n)}(e^{i\theta}) = e^{ni\theta}$ met $n \in \mathbf{Z}$. Nu zegt Peter-Weyl dat elke kwadratisch integreerbare functie f op de eenheidscirkel S^1 (dit is $U(1)$ als variëteit) te schrijven zijn als een reeks $f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$ waarbij de convergentie in de L_2-norm is. Dit is precies de Fourierreeks van f (zie hoofdstuk 2).

§9.5. Representaties van Lie-algebra's.

De studie van de representaties van eindig-dimensionale Liegroepen is equivalent met de studie van representaties van de Lie-algebra. Een representatie $\phi : G \to GL(V)$ van een Liegroep G induceert dus een representatie van de Lie-algebra g van G. Omgekeerd is een representatie $\psi : g \to gl(V)$ van een eindig-dimensionale Lie-algebra g te "liften" tot een representatie van een enkelvoudig-samenhangende Liegroep G met Lie-algebra g. Hieronder gaan we verder in op de details van deze correspondentie.

Propositie 9.13: Laten G en H Lie-groepen zijn met Lie-algebra's g en h. Zij verder $\phi : G \to H$ een Lie-groepshomomorfisme. Dan induceert de raakafbeelding ϕ_* een Lie-algebrahomomorfisme van g naar h.

Bewijs: Zij X een links-invariant vectorveld op G. We tonen aan dat $\phi_* X$ links-invariant vectorveld is op $\phi(G) \subset H$. Uit het feit dat ϕ een homomorfisme is volgt dat $L_{\phi(g)} \circ \phi = \phi \circ L_g$. Dan is volgens lemma 7.1 voor $g, h \in G$

$$(L_{\phi(g)})_*(\phi_* X)_{\phi(h)} = \phi_* \circ (L_g)_*(X_h) = \phi_*(X_{gh}) = (\phi_* X)_{\phi(gh)} = (\phi_* X)_{\phi(g)\phi(h)}.$$

Dus is $\phi_* X$ links-invariant en dus is $\phi_X \in h$. Verder is ϕ_* lineair en volgens Propositie 7.4 is $\phi_*[X, Y] = [\phi_* X, \phi_* Y]$ voor $X, Y \in g$. $\diamond$

Zij nu $X \in g$ linksinvariant met stroming $f_t(e) = \exp(tX)$. De stroming van $\phi_* X$ is nu $\phi \circ f_t(e) = \phi(\exp(tX))$. Dus is

$$\phi(\exp(tX)) = \exp(t\phi_* X). \tag{9.6}$$

Omdat de exponentiële afbeelding rond $e \in G$ een lokaal diffeomorfisme geeft tussen G en g is voor $|t|$ klein genoeg en $X, Y \in g$ het product $\exp(tX)\exp(tY) = \exp(Z(t))$ voor zekere $Z(t) \in g$. De vorm van $Z(t)$ wordt gegeven door het volgende resultaat:

Stelling 9.14 (*Baker-Campbell-Hausdorff:*) Zij G een Liegroep met Lie-algebra g. Voor $t \in \mathbf{R}$ en $X, Y \in g$ is

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp(Z(t)) = \exp(t(X+Y) + \frac{1}{2}t^2[X,Y] + \ldots)$$

waarbij $Z(t)$ een machtreeks in t is met convergentiestraal oneindig en waarbij de coëfficiënten van t elementen van g zijn die kunnen worden uitgedrukt in de vorm van (herhaalde) commutatoren van X en Y.

Zij nu $\psi : g \to h$ een Lie-algebrahomomorfisme tussen de Lie-algebra's g en h van de Lie-groepen G resp. H. Dan laat $\phi : U \subset G \to H$ gedefinieerd zijn in een (voldoende kleine) open omgeving

U van $e \in G$ door $\phi(\exp(tX)) = \exp(t\phi_* X)$ waarbij $X \in g$ en $|t|$ voldoende klein is. Dan is voor $X, Y \in g$

$$\phi(e^{tX})\phi(e^{tY}) = e^{t\phi_* X} e^{t\phi_* Y} = e^{t(\phi_* X + \phi_* Y) + t^2[\phi_* X, \phi_* Y]/2 + \dots} =$$

$$= e^{\phi_*(t(X+Y) + t^2[X,Y]/2 + \dots)} = \phi(e^{t(X+Y) + t^2[X,Y]/2 + \dots}) = \phi(e^{tX} e^{tY}). \tag{9.7}$$

Dus ϕ is een lokaal Lie-groepshomomorfisme. Als G enkelvoudig samenhangend is, dan kan ϕ worden uitgebreid tot een globaal Lie-groepshomomorfisme. In het algemene geval is dit niet zo.

Voorbeeld: Laat $H = SU(2)$ en $G = SO(3)$. De vectorruimte $\mathbf{R}^3$ heeft (via het uitwendig product) een Lie-algebrastructuur en is isomorf met $su(2)$ ($\cong so(3)$); het isomorfisme $\psi : \mathbf{R}^3 \to su(2)$ wordt gegeven door

$$\psi : \mathbf{x} = (x, y, z) \to -\frac{i}{2}(x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3) = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}. \tag{9.8}$$

Verder is $\det \psi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$. Beschouw voor $h \in SU(2)$ de afbeelding $\mathrm{Ad}(h) : su(2) \to su(2)$ gegeven door $\mathrm{Ad}(h)(X) = hXh^{-1}$. $\mathrm{Ad}(h)$ is een Lie-algebrahomomorfisme en $\mathrm{Ad}{:}SU(2) \to gl(su(2))$ is een representatie van $H = SU(2)$ (met representatieruimte $su(2)$). Ad heet de *geadjungeerde representatie.* De raakafbeelding (of push-forward) $\mathrm{Ad}_* : su(2) \to gl(su(2))$ is gelijk aan de geadjungeerde representatie ad (ga dit na!) en $\mathrm{ad}(su(2)) \cong su(2)$ dus de raakafbeelding is een isomorfisme.
Op $\mathbf{R}^3$ induceert $\mathrm{Ad}(h)$ een lineaire afbeelding $\rho(h) : \mathbf{x} \to \psi^{-1}(h\psi(\mathbf{x})h^{-1})$. $\rho(h)$ is orthogonaal omdat $\|\rho(h)(\mathbf{x})\| = \det(h\psi(\mathbf{x})h^{-1}) = \det(\psi(\mathbf{x})) = \|\mathbf{x}\|$ en verder is $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$. Dus ρ is een Lie-groepshomomorfisme van $SU(2)$ naar $SO(3)$. De raakafbeelding ρ_* geeft een isomorfisme tussen de Lie-algebra's $su(2)$ en $so(3)$ en de inverse ρ_*^{-1} dus ook. Maar met ρ_*^{-1} correspondeert geen homomorfisme $\rho^{-1} : SO(3) \to SU(2)$ omdat $\rho(h) = \rho(-h)$ (en $-h \in SU(2)$ als $h \in SU(2)$) en ρ dus niet iverteerbaar is. De afbeelding $\rho : SU(2) \to SO(3)$ is 2:1. Omdat $\ker(\rho) = \pm I$ (waarbij I het eenheidselement is van $SU(2)$), geldt volgens Propositie 8.1 dat $SO(3) \cong SU(2)/\{\pm I\}$.

Casimir-operatoren. Zij T een operator op V die commuteert met alle operatoren van een representatie van g in $gl(V)$. Voor een irreducibele deelrepresentatie volgt uit het lemma van Schur dat $T = \lambda \cdot id$, m.a.w. de lineaire deelruimte behorende bij de representatie is bevat in een eigenruimte van T. Door voldoende veel operatoren te kiezen die commuteren met alle operatoren van de representatie van de Lie-algebra, kunnen we bereiken dat elke irreducibele representatie overeenkomt met een gemeenschappelijke eigenruimte van deze operatoren. De irreducibele representatie wordt zo gelabeld door de eigenwaarden van de verschillende operatoren. Preciezer uitgedrukt geldt:

Definitie: Zij $\psi : g \to gl(V)$ een representatie van de Lie-algebra g. Een *Casimir-operator* is een operator op V die commuteert met alle operatoren $\psi(X)$ met $X \in g$.

Definitie: Zij g een semisimpele Lie-algebra. Een deelalgebra h van g heet een *Cartan-deelalgebra* van g als h de volgende eigenschappen heeft:

i. h is abels.
ii. Voor elke $X \in h$ geldt dat ad_X complex diagonaliseerbaar is.
iii. h is maximaal m.b.t. eigenschappen (i) en (ii).

Alle Cartan-deelalgebra's hebben dezelfde dimensie. Deze dimensie heet de *rang* van g.

Voorbeeld: Beschouw de Lie-algebra $g = so(3)$ van dimensie 3 voortgebracht door J_1, J_2, J_3 met $[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k$. Elke J_i brengt een Cartan-deelalgebra voort. De rang van $so(3)$ is dus 1.

Stelling 9.13 (Chevalley): Zij g een semisimpele Lie-algebra van rang r. Zij $\{X_1, \ldots, X_n\}$ een basis van g. Dan zijn er r onafhankelijke Casimir-operatoren in de vorm van polynomen in $X_1, \ldots, X_n$ waarvan de eigenwaarden de irreducibele representaties van g geheel karakteriseren.

In de bovenstaande stelling schrijven we X_i i.p.v. $\psi(X_i)$ omdat de vorm van de Casimir-operatoren niet van de representatie ψ afhangt. In plaats van te zeggen dat de Casimir-operatoren operatoren zijn in een of andere representatieruimte, kunnen we ook zeggen dat de Casimir-operatoren elementen zijn van de *universeel omhullende* van de Lie-algebra g, die voortgebracht wordt door alle producten $X_{i_1} \ldots X_{i_k}$ van basiselementen van de Lie-algebra. In deze algebra heeft het Lie-haakje de vorm van een commutator: $[X, Y] = XY - YX$.

Als g compact en semisimpel is, dan kunnen we meteen een Casimir-operator opschrijven: laat $\{X_1, \ldots, X_n\}$ een basis zijn van g en laat g_{ij} de Cartan metrische tensor zijn bij deze basis met inverse tensor g^{ij}. Dan is $C = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} X_i X_j$ een Casimir-operator voor g. Merk op dat de definitie niet afhangt van de keuze van de basis.

Beschouw $g = so(3)$. In termen van de basis $\{J_1, J_2, J_3\}$ is $C = -\frac{1}{2}(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2)$. Als we $so(3)$ opvatten als een algebra van differentiaaloperatoren op $\mathbf{R}^3$ en $J_i = \sum_{k=1}^n \epsilon_{ijk} x^k \frac{\partial}{\partial x^j}$, dan heeft J_i dezelfde commutatierelaties $[J_i, J_j] = \sum_{k=1}^n \epsilon_{ijk} J_k$ en dus heeft C dezelfde vorm. Dit leidt tot

$$-2C = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = r^2 \Delta - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

waarbij r, θ, ϕ bolcoördinaten zijn en Δ de Laplaciaan op $\mathbf{R}^3$. $-2C$ is dus de Laplaciaan op de bol S^2.

Representaties van $SU(2)$ en $SO(3)$.

Beschouw de Lie-algebra $g = so(3)$; zoals we weten is deze isomorf met $su(2)$. g wordt voortgebracht door operatoren J_1, J_2, J_3 waarbij $[J_i, J_j] = \sum_{k=1}^n \epsilon_{ijk} J_k$ (vergelijk (8.1)). Een Cartan-deelalgebra wordt voortgebracht door J_3; er zijn geen andere operatoren die commuteren met J_3 en de rang van g is 1. De Casimir-operator is $C = -\frac{1}{2}(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2)$. We vatten g op als complexe Lie-algebra, m.a.w. de g bevat alle complexe (i.p.v. reële) lineaire combinaties van J_1, J_2, J_3. Laat T een irreducibele representatie zijn van g met representatieruimte V. I.p.v. $T(J_i)$ (etc.) schrijven we gewoon J_i. Laat $H_i = iJ_i$; dan is H_3 hermites en heeft dus reële eigenwaarden. Definieer de *ladderoperatoren* $H_+ = H_1 + iH_2, H_- = H_1 - iH_2$. Dan brengen H_3, H_+, H_- de Lie-algebra voort en

$$[H_3, H_+] = H_+, \; [H_3, H_-] = -H_-, \; [H_+, H_-] = 2H_3.$$

Zij $v \in V$ een eigenvector van H_3: $H_3 v = av$ met $a \in \mathbf{R}$. Dan is

$$H_3 H_+ v = H_+ H_3 v + [H_3, H_+]v = (a+1)H_+ v, \quad H_3 H_- v = H_- H_3 v + [H_3, H_-]v = (a-1)H_- v.$$

en dus ook $H_3 H_+^k v = (a+k) H_+^k v$, $H_3 H_-^k v = (a-k) H_-^k v$, zodat $v, H_+ v, \ldots, H_- v, \ldots$ hetzij nul zijn, hetzij eigenvectoren zijn van H_3 bij verschillende eigenwaarden; in het laatste geval zijn ze lineair onafhankelijk. Omdat V eindig-dimensionaal is, bestaat er een $k > 0$ zodanig dat $H_+^k v = H_-^k v = 0$. Zonder beperking der algemeenheid kunnen we aannemen dat $H_+ v = 0$, en dat $k > 0$ het kleinste getal is zodanig dat $H_-^k v = 0$. We tonen aan dat $\{v, H_- v, \ldots, H_-^{k-1} v\}$ een basis vormt van V. We hebben al gezien dat deze vectoren lineair onafhankelijk zijn. Omdat de representatie irreducibel is, is het voldoende om aan te tonen dat $H_+ H_-^m v$ voor $m = 0, \ldots, k-1$ een lineaire combinatie is van $v, \ldots, H_-^{k-1} v$. Dit volgt uit

$$H_+ H_-^m v = [H_+, H_-] H_-^{m-1} v + H_- H_+ H_-^{m-1} v = 2(a - m + 1) H_-^{m-1} v + H_- H_+ H_-^{m-1} v.$$

Door inductie naar m toe te passen vinden we dat

$$H_+ H_-^m v = (2ma - m(m-1)) H_-^{m-1} v. \tag{9.9}$$

De dimensie van V is dus k en door in (9.9) $m = k$ te kiezen zien we dat $a = (k-1)/2$. De eigenwaarden van H_3 zijn dus $-(k-1)/2, -(k-3)/2, \ldots, (k-3)/2, (k-1)/2$. De representatie $T = T^{((k-1)/2)}$ ligt dus geheel vast door k: er is voor elke k (op equivalentie na) precies één irreducibele representatie van dimensie k. Door de Casimiroperator C op v toe te passen vinden we de eigenwaarde:

$$2Cv = (H_1^2 + H_2^2 + H_3^2)v = (H_- H_+ + H_3 + H_3^2)v = j(j+1)v, \quad \text{waarbij } j = \frac{k-1}{2},$$

zodat $2C = j(j+1) \cdot id_V$ voor de representatie $T^{(j)}$ waarbij $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$.
De matrix van H_3 t.o.v. de basis $\{v, H_- v, \ldots, H_-^{k-1} v\}$ is een diagonaalmatrix $\mathrm{diag}(j, j-1, \ldots, -j+1, -j)$ waarbij $j = (k-1)/2$. Door de exponentiaalafbeelding toe te passen verkrijgen we een representatie van $SO(3)$; het groepselement $\exp(i\phi H_3)$ komt overeen met rotatie $R_z(\phi)$ om de x_3-as over een hoek ϕ. De matrix is dus

$$R_z^{(j)}(\phi) = \begin{pmatrix} e^{ij\phi} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{i(j-1)\phi} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{-ij\phi} \end{pmatrix}. \tag{9.10}$$

Omdat echter $R_z(2\pi) = id$ volgt dat de representatie $T^{(j)}$ alleen voor gehele waarden van j een representatie van $SO(3)$ geeft; de halftallige representaties geven echter wel representaties van $SU(2)$; zo geeft de representatie met $j = 1/2$ de *fundamentele representatie* van $SU(2)$ waarbij $2H_j = \sigma_j$ de Pauli-matrices zijn. Merk op dat de groep $SU(2)$, in tegenstelling tot $SO(3)$, enkelvoudig samenhangend is.

Tenslotte gebruiken we de karakters om de Clebsch-Gordandecompositie van het tensorproduct $T^{(k \otimes \ell)}$ van $T^{(k)}$ en $T^{(\ell)}$ te berekenen. Voor het berekenen van het karakter $\chi^{(k)}$ van $T^{(k)}$ gebruiken we dat voor $g \in SO(3)$ geldt dat $\chi^{(k)}(g) = \chi^{(k)}(hgh^{-1})$ m.a.w. de waarde van het karakter hangt alleen af van de conjugatieklasse. Als g nu een rotatie over een hoek ϕ voorstelt, dan is er een $h \in SO(3)$ zodanig dat $g = hR_z(\phi)h^{-1}$ en dus hangt het karakter alleen van de rotatiehoek ϕ af; m.b.v. (9.10) zien we dat

$$\chi^{(k)}(\phi) := \chi^{(k)}(R_z(\phi)) = \sum_{p=-k}^{k} e^{ip\phi}.$$

Nu is verder $\chi^{(k \otimes \ell)}(g) = \chi^{(k)}(g)\chi^{(\ell)}(g)$ en dus is

$$\chi^{(k \otimes \ell)}(\phi) = \sum_{p=-k}^{k} \sum_{q=-\ell}^{\ell} e^{i(p+q)\phi}.$$

Neem aan dat $\ell \leq k$. Dan komt in het rechterlid de term $e^{ir\phi}$ precies $k + \ell + 1 - |r|$ keer voor als $k - \ell \leq |r| \leq k + \ell$ en $2\ell + 1$ keer als $|r| \leq k - \ell$. We vinden dus

$$\chi^{(k \otimes \ell)}(\phi) = \sum_{s=|k-\ell|}^{k+\ell} \sum_{r=-s}^{s} e^{ir\phi} = \sum_{s=|k-\ell|}^{k+\ell} \chi^{(s)}(\phi).$$

De Clebsch-Gordan-decompositie van $T^{(k)} \otimes T^{(\ell)}$ is dan

$$T^{(k)} \otimes T^{(\ell)} = \sum_{s=|k-\ell|}^{k+\ell} T^{(s)}. \tag{9.11}$$

Hetzelfde resultaat geldt ook als k, ℓ halftallig zijn. De som over s loopt dan over $|k-\ell|, |k-\ell|+1, \ldots, k+\ell$.

Voorbeeld: Beschouw de fundamentele representatie $T^{(1/2)}$ van $SU(2)$ van dimensie 2. Voor $g \in SU(2)$ wordt de matrix van $T^{(1/2)}(g)$ t.o.v. een orthonormale basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ van de representatieruimte V gegeven door

$$T^{(1/2)}(g) = \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

voo r zekere $a, b \in \mathbf{C}$ met $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Beschouw nu de representatie $T^{(1/2 \otimes 1/2)}$. De matrix van g t.o.v. de basis $\{\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)/\sqrt{2}, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)/\sqrt{2}\}$ wordt gegeven door $\begin{pmatrix} a^2 & -\sqrt{2}a\bar{b} & \bar{b}^2 & 0 \\ \sqrt{2}ab & |a|^2 - |b|^2 & -\sqrt{2}\bar{a}\bar{b} & 0 \\ b^2 & \sqrt{2}a\bar{b} & \bar{a}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Zowel de lineaire deelruimte Sym^2 van $V \otimes V$ bestaande uit de symmetrische tensoren (opgespannen door $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$) als de lineaire deelruimte $\mathrm{Ant}^2 = \mathrm{span}\{\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1\}$ van de antisymmetrische tensoren zijn duidelijk invariant onder $T^{(1/2 \otimes 1/2)}$. De restrictie van $T^{(1/2 \otimes 1/2)}$ tot beide deelruimten is resp. $T^{(1)}$ resp. $T^{(0)}$.

Een andere manier om de irreducibele representaties van $SO(3)$ te vinden, is door de eigenwaarden van de Casimiroperator te bepalen m.b.v. de representatie van de Lie-algebra $so(3)$ d.m.v. differentiaaloperatoren. Boven hebben we gezien dat de Casimiroperator (op een irrelevante factor na) gelijk is aan de Laplaciaan op de bol: $L^2 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$. De eigenwaardenvergelijking $Lv = \lambda v$ is een partiële differentiaalvergelijking, waarvan de oplossingen welbekend zijn: de eigenwaarden zijn $\lambda_\ell = \ell(\ell+1)$ voor $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ en de bijbehorende eigenruimten zijn $2\ell+1$-dimensionaal. Omdat de operator $J_z = -\frac{\partial}{\partial \phi}$ met L^2 commuteert, bestaat er een gemeenschapplijke basis van eigenfuncties van L en J_z: voor de bolfuncties $Y_{\ell m}$ geldt dat

$$L^2 Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \ell(\ell+1) Y_{\ell, m}(\theta, \phi), \quad J_z Y_{\ell m}(\theta, \phi) = -m Y_{\ell m}(\theta, \phi).$$

Hierbij is m geheel en $-\ell \leq m \leq \ell$.

Representaties van de Lorentzgroep. De Lie-algebra it so(3,1) wordt opgespannen door de operatoren $K_1 = M_{01}, K_2 = M_{02}, K_3 = M_{03}, J_3 = M_{12}, J_1 = M_{23}, J_2 = M_{31}$ (zie §9.2) Dan geldt

$$[J_i, J_j] = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_{ijk} J_k, \ [K_i, K_j] = -\sum_{k=1}^{n} \epsilon_{ijk} J_k, \ [J_i, K_j] = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_{ijk} K_k.$$

Deze commutatierelaties zijn (op een factor $2i$ na) dezelfde als de relaties voor de zes voortbrengers $\sigma_i, i\sigma_i$ $(i = 1, 2, 3)$ van de Lie-algebra $sl(2, \mathbf{C})$. $sl(2, \mathbf{C})$ is de complexificatie van de Lie-algebra $su(2)$ (de *complexificatie* $V^{\mathbf{C}} = V \oplus iV$ van een reële vectorruimte of Lie-algebra V wordt verkregen door ook complexe lineaire combinaties toe te laten). Als reële Lie-algebra's zijn $so(3,1)$ en $sl(2, \mathbf{C})$ dus isomorf.

Laat nu $K_j + iJ_j = L_j^+$ en $K_j - iJ_j = L_j^-$ voor $j = 1, 2, 3$. Dan is

$$[L_i^+, L_j^-] = 0, \quad [L_i^+, L_j^+] = 2i \sum_{k=1}^{n} \epsilon_{ijk} L_k^+, \quad [L_i^-, L_j^-] = -2i \sum_{k=1}^{n} \epsilon_{ijk} L_k^-,$$

m.a.w. de operatoren L_j^+ $(j = 1, 2, 3)$ enerzijds en L_j^- anderzijds brengen Lie-deelalgebra's voort die isomorf zijn met (de complexe) Lie-algebra $su(2)$ en beide Lie-deelalgebra's commuteren onderling. Met andere woorden voor de *complexe* Lie-algebra's (maar niet voor de reële) geldt dat

$$so(3, 1) \equiv su(2) \oplus su(2).$$

De irreducibele representaties van $so(3, 1)$ zijn dus van de vorm $T^{(j.j')} = T^{(j)} \oplus T^{(j')}$ waarbij j, j' halftallig zijn en $T^{(j)}$ de irreducibele representatie van $su(2)$ van dimensie $2j + 1$ is. De representaties $T^{(1/2,0)}$ en $T^{(0,1/2)}$ heten de *Weyl-representaties.* De elementen van de representatieruimte heten *(Weyl-)spinoren.* De *Diracrepresentatie* $T^{(0,1/2)} \oplus T^{(1/2,0)}$ werkt op 4-componentige spinoren. Deze representatie is reducibel voor de Lorentzgroep, maar is irreducibel als we aan de Lorentzgroep de pariteitsoperatie (dit is de puntspiegeling $(x^0, \mathbf{x}) \to (x^0, -\mathbf{x})$ in de Minkowskiruimte die op de Lie-algebra werkt door de elementen L_i^+ en L_i^- te verwisselen) toevoegen. De definiërende (of fundamentele) representatie $T^{(1/2,1/2)}$ van de groep werkt op 4-vectoren. De 6-dimensionale representatie$T^{(0,1)} \oplus T^{(1,0)}$ werkt op de antisymmetrische 4-tensoren zoals de elektromagnetische veldtensor $F^{\mu\nu}$, waarbij $E^i = F^{i0}$ en $B^k = -(1/2)\epsilon_{ijk} F^{ij}$ de componenten van het elektrische resp. magnetische veld zijn.