III. Integraalvergelijkingen.

In dit hoofdstuk passen we de spectraaltheorie van operatoren op Hilbertruimten toe op een aantal lineaire integraalvergelijkingen. In een volgende hoofdstuk zullen we zien hoe bepaalde typen differentiaalvergelijkingen tot integraalvergelijkingen kunnen worden getransformeerd. Een aantal veel voorkomende typen integraalvergelijkingen zijn:

$$g(x) = \int_a^b f(t)K(x,t)dt \tag{3.1a}$$

Dit is een *Fredholm-integraalvergelijking van de 1e soort.* Hierbij zijn g en $K(x,t)$ gegeven functies. De functie K die gedefinieerd is op $[a,b]\times[a,b]$ heet een integraalkern. Eenzelfde type met variabele bovengrens:

$$g(x) = \int_a^x f(t)K(x,t)dt \tag{3.1b}$$

heet een *Volterra-integraalvergelijking van de 1e soort.* Een ander type is het volgende:

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b f(t)K(x,t)dt. \tag{3.2a}$$

Hierbij zijn opnieuw g en K gegeven functies. Als $g = 0$ dan noemen we de vergelijking homogeen. De parameter λ wordt vaak toegevoegd, zodat het homogene type een eigenwaardenvergelijking wordt. Een integraalvergelijking van deze vorm heet een *Fredholm-integraalvergelijking van de 2e soort.* Analoog heet het type met variabele bovengrens

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^x f(t)K(x,t)dt. \tag{3.2b}$$

een *Volterra-integraalvergelijking van de 2e soort.* Door $K(x,t) = 0$ te nemen voor $t > x$, kunnen we de Volterra-vergelijkingen als een speciaal geval van de Fredholm-vergelijkingen beschouwen.

We bestuderen in dit hoofdstuk integraalvergelijkingen van type (3.2a) en (3.2b) waarvan de behandeling aansluit bij de theorie uit het vorige hoofdstuk. We nemen aan dat alle functies in de Hilbertruimte $L_2(a,b)$ liggen en $K : [a,b]\times[a,b] \to \mathbf{C}$ is continu. De integraal met kern K definieert een begrensde operator $K \in \mathcal{B}(L_2(a,b))$:

$$Kf(x) = \int_a^b K(x,t)f(t)dt \tag{3.3}$$

met

$$\|K\|^2 = \int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dxdt. \tag{3.4}$$

De integraalvergelijkingen (3.2a) en (3.2b) kunnen we schrijven als $(id_H - \lambda K)f = g$, met id_H de identieke operator op $H = L_2(a,b)$. De operator $id_H - \lambda K$ is inverteerbaar op H als λ^{-1} geen eigenwaarde is van K.

§3.1. Volterra-integraalvergelijkingen van de tweede soort.

Laat $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ en $H = L_2(a,b)$. We tonen aan dat in het geval dat $K(x,t) = 0$ voor $x < t$ en $K(x,t)$ begrensd is, de operator $id_H - \lambda K$ voor alle λ inverteerbaar is, m.a.w. $\sigma(K) = \{0\}$.

Hiertoe tonen we aan dat de inverse van $id_H - \lambda K$ wordt gegeven door de begrensde operator $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K^n$. Merk op dat voor $n = 1, 2, \ldots$ de operator K^n wordt gegeven door

$$K^n f(x) = \int_a^b K_n(x,t) f(t) dt \tag{3.5}$$

waarbij $K_1(x,t) = K(x,t)$ en K_n recursief wordt gegeven door

$$K_n(x,t) = \int_a^b K_{n-1}(x,u) K(u,t) du.$$

We geven een afschatting voor $\|K^n\|$; laat M een bovengrens zijn voor $K(x,t)$:

$$|K_n(x,t)| = \left| \int_t^x \int_t^{t_1} \cdots \int_t^{t_{n-2}} K(x,t_1)K(t_1,t_2)\ldots K(t_{n-1},t) dt_{n-1} \ldots dt_2 dt_1 \right| \leq$$

$$\leq M^n \int_t^x \int_t^{t_1} \cdots \int_t^{t_{n-2}} dt_{n-1} \ldots dt_2 dt_1 = M^n (x-t)^{n-1}/(n-1)!,$$

en dus

$$\|K^n\|^2 = \int_a^b \int_a^x |K_n(x,t)|^2 dt dx \leq \frac{M^{2n}}{(n-1)!^2} \int_a^b \int_a^x (x-t)^{2n-2} dt dx =$$

$$= \frac{M^{2n}(b-a)^{2n}}{2n(2n-1)(n-1)!^2} \leq \left(\frac{M^n (b-a)^n}{n!} \right)^2.$$

Maar dan is

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n \|K^n\| \leq e^{\lambda M(b-a)}$$

en de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K^n$ convergeert voor elke $\lambda \in \mathbf{C}$ en is dus een begrensde operator. Tenslotte is

$$(id_H - \lambda K) \cdot \sum_{n=0}^{N} \lambda^n K^n = \sum_{n=0}^{N} \lambda^n K^n \cdot (id_H - \lambda K) = (id_H - \lambda^{N+1} K^{N+1})$$

en het rechterlid convergeert naar id_H als $N \to \infty$. Dus is $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K^n = (id_H - \lambda K)^{-1}$. De oplossing van (3.2a) wordt dus gegeven door de *Neumann-reeks*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (K^n g)(x). \tag{3.6}$$

Voorbeeld: Beschouw de integraalvergelijking

$$y(x) = 1 + \lambda \int_0^x y(t) dt.$$

Hier is $K(x,t) = 1$ voor $x > t$ en $= 0$ voor $x < t$. Verder is $g(x) = 1$ en voor alle $n \geq 1$

$$K^n g(x) = \int_0^x (K^{n-1}g)(t)dt$$

dus $K^n g(x) = x^n/n!$ en de oplossing is

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K^n g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda x)^n/n! = e^{\lambda x}.$$

Merk op dat de integraalvergelijking ook kan worden opgelost door deze te differentiëren en de ontstane differentiaalvergelijking op te lossen.

§3.2. Fredholm-integraalvergelijkingen van de tweede soort.

Laat a, b, H als boven zijn. In tegenstelling tot het geval van Volterra-integraalvergelijking van de 2e soort, kunnen er $\lambda \in \mathbf{C}$ zijn, zodanig dat $id_H - \lambda K$ niet-inverteerbaar is. Deregelijke waarden noemen we karakteristieke waarden van de integraalvergelijking. Wel geldt volgens Lemma 2.12 dat $id_H - \lambda K$ inverteerbaar is indien $|\lambda| < \|K\|^{-1}$. De inverse operator wordt dan, als in het geval van de Volterra-vergelijking, gegeven door $(id_H - \lambda K)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K^n$, en de oplossing van (3.2a) wordt weer gegeven door de Neumann-reeks (3.6).
Indien K een compacte operator is, geldt verder volgens de spectraalstelling 2.18 voor compacte operatoren dat er eindig veel karakteristieke waarden zijn of dat de karakteristieke waarden een rij $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ vormen zodanig dat $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$.

Laat $f, g \in H$. Dan is

$$\langle f, Kg \rangle = \int_a^b \int_a^b \overline{f(x)} K(x,t) g(t) dt dx = \int_a^b \int_a^b \overline{f(x) K^*(t,x)} g(t) dt dx = \langle K^\dagger f, g \rangle$$

waarbij

$$K^\dagger f(x) = \int_a^b K^*(x,t) f(t) dt$$

en de *geadjungeerde kern* wordt gegeven door $K^*(x,t) = \overline{K(t,x)}$. Als dus $K(x,t) = K^*(x,t)$ voor $x, t \in [a,b]$, dan is $K = K^\dagger$. Uit de spectraalstelling 2.21 voor zelfgeadjungeerde operatoren volgt nu

Stelling 3.1 (*Fredholm-alternatief*): Beschouw voor $a, b \subset \mathbf{R}$, $a < b$, de integraalvergelijking (3.2a) met zelfgeadjungeerde kern: $K(x,t) = \overline{K(t,x)}$. Dan doet zich een van de volgende twee mogelijkheden voor:

i. Als λ geen karakteristieke waarde is van de integraalvergelijking, dan heeft de vergelijking voor elke functie $g \in L_2(a,b)$ precies één oplossing $f \in L_2(a,b)$.

ii. Als λ een karakteristieke waarde is van de vergelijking dan heeft de vergelijking (3.2a) voor $g \in L_2(a,b)$ een oplossing $f \in L_2(a,b)$ dan en slechts dan als $\langle h, g \rangle = 0$ voor alle $h \in L_2(a,b)$ waarvoor geldt dat $Kh(x) = \int_a^b K(x,t)h(t)dt = \lambda h(x)$. Verder zijn alle karakteristieke waarden reëel.

Bewijs: Het enige wat nog moet worden aangetoond, is de eerste bewering van (ii). Deze volgt uit het feit dat indien K een compacte zelfgeadjungeerde operator is, dan is voor alle $\mu \in \mathbf{R}$, $\mathrm{im}(K - \mu \cdot id_H)$ een gesloten lineaire deelruimte (immers in stelling 2.20 is $q = r = 1$) en dus is volgens Propositie 2.15

$$\mathrm{im}(K - \mu \cdot id_H) = (\ker(K^\dagger - \overline{\mu} \cdot id))^\perp = (\ker(K - \mu \cdot id))^\perp.$$

Als K zelfgeadjungeerd is, dan is volgens Stelling 2.21 H de directe som van de eigenruimten van K: $H = H_0 \oplus \overline{W}$ waarbij $W = \oplus_{\lambda \neq 0} H_{1/\lambda}$ met $H_0 = \mathrm{Ker}(K)$ en $H_{1/\lambda} = \mathrm{Ker}(K - \lambda^{-1} \cdot id)$. $\overline{W}$ heeft een aftelbare orthonormale basis $\{e_1, e_2, \ldots\}$ van eigenvectoren ($Ke_j = \lambda_j e_j$). Dan kunnen we schrijven:

$$f = f_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \langle e_j, f \rangle e_j, \quad g = g_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \langle e_j, g \rangle e_j, \quad Kf = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} \langle e_j, f \rangle e_j.$$

Als we deze uitdrukkingen invullen in de vergelijking $f = g + \lambda K f$ vinden we, door inproducten te nemen met e_j:

$$f_0 = g_0, \quad \langle e_j, f \rangle = \langle e_j, g \rangle \cdot \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda}.$$

Als λ geen karakteristieke waarde is, dan ligt g hierdoor uniek vast. Als $\lambda = \lambda_n$ voor zekere n, dan is noodzakelijk $\langle e_n, g \rangle = 0$ (dit is precies het Fredholm-alternatief). De oplossing ligt dan vast op een lineaire combinatie van de eigenvectoren bij eigenwaarde λ_n^{-1} na. $\diamond$

Het bepalen van de karakteristieke waarden van een integraalvergelijking is i.h.a. niet exact mogelijk. Alleen voor speciale kernen $K(x, t)$ bestaat er een exacte oplossing van het eigenwaardenprobleem. In de volgende paragraaf bestuderen we een speciaal geval.

Voorbeeld: Beschouw de integraalvergelijking

$$y(x) = x + \lambda \int_a^b xty(t)dt.$$

De kern is hier $K(x, t) = xt$ en dus zelfgeadjungeerd. Verder is

$$\|K\| = \left(\int_a^b \int_a^b (xt)^2 dx dt \right)^{1/2} = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

Uit

$$K^n x = \int_a^b t(K_n(x, t))dt$$

en

$$K_n(x, t) = \int_a^b \ldots \int_a^b K(x, u_1)K(u_1, u_2) \ldots K(u_{n-1}, t) du_1 du_2 \ldots du_{n-1}$$

volgt dat $K^n x = x\|K\|^n$ voor $n = 0, 1, \ldots$. Nu is voor $|\lambda| < \|K\|^{-1}$ de oplossing gegeven door de Neumann-reeks

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K^n x = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \|K\|)^n x = \frac{x}{1 - \lambda \|K\|}.$$

Invullen toont aan dat deze oplossing voldoet voor alle $\lambda \neq \|K\|^{-1}$. $\lambda = \|K\|^{-1}$ is een karakteristieke waarde: de functie x is een oplossing van de homogene vergelijking: $x = \|K\|^{-1} \int_a^b xt^2 dt$. Beschouw nu de inhomogene vergelijking (3.2b) met $K(x,t) = xt$ en $\lambda = \|K\|^{-1}$. Vermenigvuldigen met de eigenfunctie x en integreren over x geeft

$$\int_a^b xf(x)dx = \int_a^b xg(x)dx + \|K\|^{-1} \int_a^b x^2 dx \int_a^b tf(t)dt$$

en dus is $\displaystyle\int_a^b xg(x)dx = 0$. Dit is een voorbeeld van het Fredholm-alternatief.

Integraalvergelijkingen met separabele kern. Beschouw de Fredholmse integraalvergelijking (3.2a) met een kern van de vorm

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^n \overline{\phi_i(t)} \psi_i(x). \tag{3.7}$$

en ϕ_i, ψ_i functies in $H = L_2(a,b)$. We kunnen zonder beperking der algemeenheid aannemen dat $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ een lineair onafhankelijk stelsel is. De operator K is een operator van eindige rang en dus compact. De eigenwaarden en eigenfuncties van K zijn exact te bepalen: voor $f \in H$ is

$$Kf(x) = \int_a^b K(x,t)f(t)dt = \sum_{i=1}^n \langle \phi_i, f \rangle \psi_i(x).$$

De operator K is dus van eindige rang (en i.h.b. compact) en het beeld $\mathrm{im}(K)$ wordt opgespannen door $\psi_1, \ldots, \psi_n$. I.h.b. zijn alle eigenfuncties van K lineaire combinaties van $\psi_1, \ldots, \psi_n$: voor f een eigenfunctie geldt $f = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i$ voor zekere $a_i \in \mathbf{C}$ en uit $Kf = \lambda f$ volgt dat

$$\sum_{i=1}^n \langle \phi_i, f \rangle \psi_i = \lambda \sum_{i=1}^n a_i \psi_i$$

en wegens lineaire onafhankelijkheid volgt dan $\lambda a_i = \langle \phi_i, f \rangle$ voor $i = 1, \ldots, n$. Dit impliceert op zijn beurt dat

$$\sum_{j=1}^n a_j \langle \phi_i, \psi_j \rangle = \lambda a_i. \tag{3.8}$$

(3.8) is een gewone eigenwaardenvergelijking in $\mathbf{C}^n$ en kan met bekende methoden uit de lineaire algebra worden opgelost.

Voorbeeld: Laat $K(x,t) = 1 + \sin(x+t)$ en $[a,b] = [-\pi, \pi]$. We kunnen $K(x,t) = 1 + \sin x \cos t + \cos x \sin t$ schrijven. Dan is

$$\phi_1(x) = \psi_1(x) = 1, \ \phi_2(x) = \psi_3(x) = \cos x, \ \phi_3(x) = \psi_2(x) = \sin x.$$

ψ_1, ψ_2, ψ_3 zijn lineair onafhankelijke functies op $L_2(-\pi, \pi)$ (dit is bijvoorbeeld in te zien m.b.v. de Wronskiaan). Merk op dat K hermites is. Laat A de matrix zijn met matrixelementen

$A_{ij} = \langle \phi_i, \psi_j \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_i(t)\psi_j(t)dt$ voor $i,j = 1,2,3$. Dan is $A = \pi \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Eigenfuncties bij karakteristieke waarde λ^{-1} zijn van de vorm $f = \sum_{i=1}^{3} a_i\psi_i$, waarbij $\mathbf{a} = (a_1\ a_2\ a_3)^T$ voldoet aan $A\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$ (vergelijk (3.8)). De eigenwaarden van de matrix A zijn $2\pi, \pi, -\pi$ met eigenvectoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, resp. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en de bijbehorende eigenfuncties zijn dus

$$f_1(x) = 1, f_2(x) = \sin x + \cos x, f_3(x) = \sin x - \cos x$$

bij karakteristieke waarden $\lambda_1^{-1} = 1/2\pi, \lambda_2^{-1} = 1/\pi$, resp. $\lambda_3^{-1} = -1/\pi$. Het spectrum van K is gelijk aan $\{0, \pi, -\pi, 2\pi\}$. De eigenruimte bij eigenwaarde 0 is oneindig-dimensionaal: de functies $f(x) = \sin nx$ en $\cos nx$ voldoen aan

$$Kf(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(1 + \sin x \cos t + \cos x \sin t)dt = 0$$

voor $n = 2, 3, \ldots$.

Opmerking: Differentiaalvergelijkingen kunnen in integraalvergelijkingen worden getransformeerd. Beschouw als voorbeeld de lineaire tweede-orde d.v.

$$y''(x) - p(x)y(x) = 0, \quad y(0) = a,\ y'(0) = b.$$

Eenmaal integeren geeft

$$y'(x) = y'(0) + \int_0^x p(t)y(t)dt$$

en nogmaals integreren geeft

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \int_0^x \int_0^u p(t)y(t)dtdu = a + bx + \int_0^x (x-t)p(t)y(t)dt.$$

In hoofdstuk 4 zullen we zien hoe we een 2e orde differentiaalvergelijking met twee randvoorwaarden zoals $y(a) = 0, y'(b) = 0$, in een integraalvergelijking kunnen omzetten.

3.3. Oplossing van een integraalvergelijking m.b.v. een integraaltransformatie.

Beschouw de Fredholmse integraalvergelijking van de tweede soort:

$$f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} f(t)K(x,t)dt \tag{3.9}$$

waarbij de kern van *convolutie-type* is, d.w.z. $K(x,t) = K(x-t)$ (in het Engels spreeekt men wel van een *displacement kernel*). Om deze vergelijking op te lossen passen we Fouriertransformatie toe (we nemen aan dat K, f en g een Fouriergetransformeerde $\hat{K}, \hat{f}$ resp. $\hat{g}$ hebben). Dit levert

$$\hat{f}(y) = \hat{g}(y) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)K(x-t)e^{-iyx}dtdx =$$

$$= \hat{g}(y) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iyt} \left(\int_{-\infty}^{\infty} K(x-t) e^{-iy(x-t)} dx \right) dt = \hat{g}(y) + \lambda \hat{f}(y) \hat{K}(y). \tag{3.10}$$

We nemen aan dat het verwisselen van integralen is toegestaan (wat het geval is als f en K absoluut integreerbaar zijn op $(-\infty, \infty)$). Vergelijking (3.10) zegt in feite dat de Fouriergetransformeerde van het convolutieproduct van twee functies gelijk is aan het product van de Fouriergetransformeerden. Nu volgt dat

$$\hat{f}(y) = \frac{\hat{g}(y)}{1 - \lambda \hat{K}(y)}$$

en uit de omkeerstelling volgt dat

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \text{ p.v. } \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{ixy} dy := \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{N} \hat{f}(y) e^{ixy} dy. \tag{3.11}$$

Hierbij staat p.v. voor de *hoofdwaarde (principal value)* van de integraal. Deze methode kunnen we ook toepassen op integraalvergelijkingen van de eerste soort. We geven een voorbeeld:

Voorbeeld: Laat $h_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{voor } |x| < a \\ 0 & \text{voor } |x| > a \\ 1/2 & \text{voor } |x| = a \end{cases}$ met $a > 0$. De Fouriergetransformeerde van f is

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx} dx = \int_{-a}^{a} e^{-iyx} dx = \frac{2 \sin ay}{y}.$$

Uit de omkeerformule volgt dan

$$h_a(x) = \text{ p.v. } \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ay}{y} e^{ixy} dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ay \cos xy}{y} dy.$$

De Fouriergetransformeerde van de functie $K_a(x) = \dfrac{\sin ax}{x}$ is dus $\hat{K}_a(y) = \pi h_a(-y) = \pi h_a(y)$. Beschouw nu de integraalvergelijking

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x-t)}{x-t} f(t) dt. \tag{3.12}$$

Fouriertransformeren geeft

$$\hat{f}(y) = \hat{g}(y) + \lambda \hat{f}(y) \hat{K}_1(y)$$

dus

$$\hat{f}(y) = \frac{\hat{g}(y)}{1 - \lambda \pi h_1(y)} = \begin{cases} \hat{g}(y) & \text{voor } |y| > 1 \\ \hat{g}(y)/(1 - \lambda\pi) & \text{voor } |y| < 1 \end{cases}$$

en uit (3.11) volgt dan dat

$$f(x) = \frac{\lambda}{2(1-\lambda\pi)} \int_{-1}^{1} \hat{g}(y) e^{ixy} dy + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(y) e^{ixy} dy = g(x) + \frac{\lambda}{2(1-\lambda\pi)} \int_{-1}^{1} \hat{g}(y) e^{ixy} dy.$$

Zoals we aan de oplossing kunnen zien, is $\lambda = 1/\pi$ de enige karakteristieke waarde bij $K(x,t) = \sin(x-t)/(x-t)$.

Opmerking: Als de integraalvergelijking van Volterra-type is, zoals $f(x) = g(x) + \displaystyle\int_0^x f(t) K(x-t) dt$ dan kunnen we een i.p.v. een Fouriertransformatie een Laplacetransformatie $\mathcal{L}f(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(x) e^{-xs} dx$ toepassen. De methode verloopt in grote lijnen identiek.