II. Hilbertruimten, Fourierreeksen en operatoren.

Een belangrijk onderdeel van de mathematische fysica bestaat uit de studie naar de oplossingen van vergelijkingen. De oplossingen van zulke vergelijkingen die hun oorsprong vinden in een fysisch probleem zijn doorgaans van een speciaal type, bijvoorbeeld continue functies. De klasse van oplossingen maakt dan deel uit van een zekere functieruimte. Aan de functieruimten die we beschouwen wordt doorgaans nog een extra structuur opgelegd. Zo is het gebruikelijk te eisen dat de betreffende functieruimte een vectorruimte is (over de reële of complexe getallen). Om te kunnen spreken over nabijheid van oplossingen wordt de vectorruimte voorzien van een afstand of een norm. Dit maakt het mogelijk om een oplossing te benaderen d.m.v. een rij functies. Nog extra structuur krijgen we als we de vectorruimte voorzien van een inwendig product. In dit hoofdstuk bestuderen we een aantal aspecten van dergelijke functieruimten.

§2.1 Banachruimten en Hilbertruimten.

Zij V een vectorruimte over een lichaam K (we beperken ons tot het geval $K = \mathbf{R}$ of $\mathbf{C}$). Een seminorm op V is een afbeelding $\| \ \| : V \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ met de volgende eigenschappen:

a. $\|v\| \geq 0$ als $v \in V$.
b. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ voor $v \in V$, $\lambda \in K$.
c. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (de driehoeksongelijkheid).

De seminorm heet een norm als bovendien geldt dat

a'. $\|v\| > 0$ als $v \in V$, $v \neq 0$.

Een vectorruimte V waarop een norm is gedefinieerd, noemen we een *genormeerde vectorruimte.* Zij V een genormeerde vectorruimte; laat $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ een rij in V zijn. We noemen zo'n rij een *Cauchy-* of *fundamentaalrij* als voor elke $\epsilon > 0$ er een $N(\epsilon)$ bestaat zodanig dat voor $m, n > N(\epsilon)$ geldt dat $\|f_n - f_m\| < \epsilon$. In het geval dat $V = \mathbf{R}^N$ of $\mathbf{C}^N$ geldt dat iedere fundamentaalrij convergeert, d.w.z. er is een $f \in V$ zodanig dat $\|f - f_n\| \to 0$ als $n \to \infty$. Een vectorruimte V waarvoor geldt dat iedere fundamentaalrij convergeert, heet *volledig.* Een volledige genormeerde ruimte noemen we ook wel een *Banachruimte.*

Een inwendig product op een reële of complexe vectorruimte V is een afbeelding $\langle \ , \ \rangle : V \times V \to K$ met de volgende eigenschappen:

i. $\langle v, w + w' \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle$ voor $v, w', w \in V$.
ii. $\langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$ voor $v, w \in V$, $\lambda \in \mathbf{C}$.
iii. $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ voor $v, w \in V$.
iv. $\langle v, v \rangle > 0$ als $v \in V$ en $v \neq 0$.

Merk op dat uit de eerste drie eigenschappen volgt dat $\langle v + v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$ en $\langle \lambda v, w \rangle = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle$ voor $v, v', w \in V$ en $\lambda \in K$. Verder volgt uit $\langle v, v \rangle = 0$ dat $v = 0_V$.

Opmerking: Indien $K = \mathbf{R}$ dan kan complexe conjugatie worden achterwege gelaten. Het inwendig product is dan bilineair en symmetrisch en positief-definiet. In het complexe geval is het inproduct sesquilineair, hermites en positief-definiet.

Opmerking: Als eigenschappen (i)-(iii) gelden maar (iv) vervangen is door

iv'. $\langle v, v \rangle \geq 0$ als $v \in V$,

dan spreken we van een *semi-inwendig product.*

Een inwendig product induceert een norm op V d.m.v. $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$, zodat een vectorruimte met inwendig product ook een genormeerde vectorruimte is. Als zo'n vectorruimte tevens volledig is t.a.v. de door het inwendig product geïnduceerde norm, noemen we deze een *Hilbertruimte.*

Propositie 2.1: (Ongelijkheid van Schwarz). Zij V een vectorruimte met *semi-inwendig product.* Dan geldt voor $x, y \in V$

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \tag{2.1}$$

en in het geval van een (echt) inwendig product geldt gelijkheid slechts als x, y lineair afhankelijk zijn.

Bewijs: Als $y \neq 0$ zijn we klaar. Neem dus aan dat $y \neq 0$. Voor elke $\lambda \in \mathbf{C}$ geldt dat

$$0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle - 2\text{Re } \lambda\langle x, y\rangle + |\lambda|^2\langle y, y\rangle.$$

Laat nu $\lambda = \langle y, x\rangle/\langle y, y\rangle$. De ongelijkheid volgt dan meteen. In het geval dat het semi-inproduct een echt inproduct is, geldt gelijkheid alleen in het geval dat $x - \lambda y = 0$. $\diamond$

Gevolg 2.2:

i. (driehoeksongelijkheid voor normen):

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \text{voor } x, y \in H.$$

ii. (de stelling van Pythagoras:) Als $x, y \in H$ en $\langle x, y\rangle = 0$, dan is

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Bewijs:

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + 2\text{Re } \langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq$$

$$\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \quad \diamond$$

Voorbeelden:

1. De eindig-dimensionale vectorruimten $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{C}^n$ met het standaard-inproduct zijn Hilbertruimten.

2. $H = \ell_2(K)$ is de vectorruimte van rijtjes $(x_1, x_2, \ldots)$ met $x_i \in K$ ($K = \mathbf{R}$ of $\mathbf{C}$) zodanig dat $\sum_{n=1}^{\infty} |x_i|^2$ convergeert. Voor $x, y \in H$ is het inproduct gedefinieerd door $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n$. Merk op dat volgens de ongelijkheid van Schwarz

$$\left(\left|\sum_{n=1}^{N} \overline{x_n} y_n\right|\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{N} |x_n|^2 \cdot \sum_{n=1}^{N} |y_n|^2$$

zodat het inproduct inderdaad goed gedefinieerd is. Het is niet moeilijk om aan te tonen dat H volledig is. H is dus een Hilbertruimte. We noteren $\ell_2(\mathbf{C})$ meestal als ℓ_2.

3. $H = \ell_1$ is de vectorruimte van rijtjes $(x_1, x_2, \ldots)$ met $x_i \in K$ ($K = \mathbf{R}$ of $\mathbf{C}$) zodanig dat $\sum_{n=1}^{\infty} |x_i|$ convergeert. Voor $x \in H$ is de norm gedefinieerd door $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. H is volledig en dus een Banachruimte.

4. Laat nu $\Omega = [a, b] \subset \mathbf{R}$ zijn, waarbij $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Op de vectorruimte $V = C(\Omega) = C(\Omega, K)$ van continue (reëel- of complexwaardige) functies op Ω is een semi-inwendig product gedefinieerd door $\langle f, g\rangle = \int_\Omega \overline{f(x)} g(x) dx$. Dit is geen inwendig product, omdat uit $\int_\Omega |f(x)|^2 dx = 0$ niet noodzakelijk volgt dat $f = 0$ (een voorbeeld wordt gegeven door een functie f die overal 0 is op Ω met uitzondering van een eindig aantal punten). Verder is $C(\Omega)$ niet volledig: laat

$\Omega = [0,1]$ en nummer de rationale getallen op $[0,1]$ (bijv. $n_1 = 0, n_2 = 1, n_3 = 1/2, n_4 = 1/3, n_5 = 2/3, n_6 = 1/4, n_7 = 3/4, \ldots$). Laat de rij functies $f_1, f_2, f_3, \ldots$ gedefinieerd zijn door $f_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x = n_1, \ldots, n_{i-1} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$. De rij vormt een Cauchyrij in V maar er is geen limietfunctie in V: de functie $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{als } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$ is niet integreerbaar. Door over te gaan op een ruimer integraalbegrip (de *Lebesgue-integraal*) zijn limieten van integreerbare functies (zoals f) wel integreerbaar (de integraal is in het geval van f gelijk aan nul). Functies die Riemann-integreerbaar zijn, zijn ook Lebesgue-integreerbaar en de integraal heeft in beide gevallen dezelfde waarde. Beschouw nu op V de 2-norm gegeven door $\|f\|^2 = \displaystyle\int_\Omega |f(x)|^2 dx$ (waarbij de integraal de Lebesgue-integraal is). V is niet gesloten t.a.v. convergentie m.b.t. deze norm. De afsluiting van V (die de limieten van fundamentaalrijen in V bevat) is de vectorruimte $\mathcal{L}_2(\Omega)$ van kwadratisch integreerbare functies op Ω. $\mathcal{L}_2(\Omega)$ is wel volledig.

Op $\mathcal{L}_2(\Omega)$ leggen we nu een equivalentierelatie: twee functies $f, g \in V$ zijn equivalent (notatie $f \sim g$) als $\int_\Omega |f(x) - g(x)|^2 dx = 0$ (we zeggen dan dat $f = g$ bijna overal op Ω). Dit geeft een equivalentierelatie. Een equivalentieklasse bevat alle functies die bijna overal gelijk zijn aan een willekeurige functie uit dezelfde klasse; de verzameling equivalentieklassen vormt de *quotiëntverzameling* $L_2(\Omega)$. $L_2(\Omega)$ is een Hilbertruimte met inwendig product gegeven door $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_\Omega \overline{f(x)} g(x) dx$. De waarde van de integraal is onafhankelijk van de keuze van de representanten f en g en hangt dus alleen van de klassen van f en g af. Het feit dat de quotiëntverzameling een vectorruimte vormt, volgt uit het feit dat als $f \sim f', g \sim g'$ dan $f + g \sim f' + g'$ en $\lambda f \sim \lambda f'$.

5. Een ander maar soortgelijk voorbeeld van een Hilbertruimte is de ruimte $L_2(\Omega)_w$ waarbij w een op (a, b) strict positieve (gewichts)functie is en het inproduct wordt gegeven door $\langle f, g\rangle = \int_\Omega \overline{f(x)} g(x) w(x) dx$, waarbij $\langle f, f\rangle$ en $\langle g, g\rangle$ eindig zijn.

Definitie: Zij H een Banach- of Hilbertruimte. Een lineaire deelruimte $U \subset H$ heet *gesloten* als de limiet van elke fundamentaalrij in U in U ligt.

Zij U een lineaire deelruimte van een Hilbertruimte H. De verzameling $U^\perp = \{x \in H : \langle x, u\rangle = 0 \text{ voor alle } u \in U\}$ heet het orthogonaal complement van U. Merk op dat $U \cap U^\perp = \{0\}$; echter is i.h.a. $U \oplus U^\perp \neq H$ (wel als H eindige dimensie heeft).

Lemma 2.3: $U^\perp$ is een gesloten lineaire deelruimte van H.

Bewijs: Het is duidelijk dat $U^\perp$ weer een lineaire deelruimte van H is. Zij $\{x_n\}$ een fundamentaalrij in $U^\perp$. Deze rij heeft een limiet $x \in H$. We moeten aantonen dat $x \in U^\perp$: aangezien voor $u \in U$

$$|\langle x, u\rangle| = |\langle x - x_n, u\rangle| \leq \|x - x_n\| \cdot \|u\|$$

en het rechterlid naar 0 convergeert, is $\langle x, u\rangle = 0$ voor alle $u \in U$. $\diamond$

Zij U een lineaire deelruimte van H en $x \in H$. De afstand $d(x, U)$ van x tot U is gedefinieerd als het infimum van alle afstanden $d(x, u)$ voor $u \in U$. Als $u \in U$ en $v \in U^\perp$, dan is $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ en dus is $d(v, U) = \|v\|$.

Voorbeeld: Beschouw in de Hilbertruimte $H = \ell_2$ de lineaire deelruimte W die alle rijtjes $(x_1, x_2, \ldots)$ bevat zodanig dat $x_i \neq 0$ voor slechts eindig veel i. W is niet gesloten en $W^\perp = \{0\}$. De afsluiting $\overline{W}$ van W bevat alle limieten van fundamentaalrijen in W en is de kleinste gesloten lineaire deelruimte in H die W bevat. Er geldt dat $\overline{W} = W^{\perp\perp} = H$.

Propositie 2.4: (1) Laat H een Hilbertruimte zijn en W een gesloten lineaire deelruimte. Dan is er voor elke $x \in H$ een unieke $y \in W$ zodanig dat $\|x - y\| = d(x, W)$. Verder is $x - y \in W^{\perp}$.
(2) $H = W \oplus W^{\perp}$.
(3) $W^{\perp\perp} = W$.

We bewijzen Propositie 2.4. in de volgende paragraaf.

§2.2. Orthogonale stelsels en Fourierreeksen.

Zij H een Hilbertruimte. Een deelverzameling S heet een *orthogonaal* stelsel als $\langle e, f\rangle = 0$ voor $e, f \in S$, $e \neq f$. Als bovendien $\langle e, e\rangle = 1$ voor alle $e \in S$ dan heet het stelsel *orthonormaal.* Een orthogonaal (resp. orthonormaal) stelsel $\{e_1, e_2, \ldots\}$ heet volledig als er voor iedere $f \in H$ een rij complexe getallen $\{a_1, a_2, \ldots\}$ bestaat zodanig dat $\|f - \sum_{i=1}^{N} a_i e_i\| \to 0$ als $N \to \infty$. Een volledig orthonormaal stelsel noemen we ook een *orthonormale basis* van H.

Lemma 2.5: Een orthogonaal stelsel S in H dat 0 niet bevat, is lineair onafhankelijk.

Bewijs: Neem aan dat $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$ waarbij $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ scalairen zijn en $e_1, \ldots, e_n \in S$. Het inproduct met e_j nemen geeft $0 = \lambda_j \langle e_j, e_j\rangle$ en dus $\lambda_j = 0$. $\diamond$

Propositie 2.6: Laat $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ een orthonormale basis van de Hilbertruimte H en $x \in H$. Dan geldt:

i. $\langle e_m, x - \sum_{i=1}^{N} \langle e_i, x\rangle e_i\rangle = 0$ voor $m = 1, \ldots, N$.

ii. $\|x - \sum_{i=1}^{N} \langle e_i, x\rangle e_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{N} |\langle e_i, x\rangle|^2$.

iii. $\sum_{i=1}^{N} |\langle e_i, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

iv. $\|x - \sum_{i=1}^{N} a_i e_i\|^2 \geq \|x - \sum_{i=1}^{N} \langle e_i, x\rangle e_i\|^2$ en gelijkheid geldt dan en slechts dan als $a_i = \langle e_i, x\rangle$ voor $i = 1, \ldots, N$.

Bewijs: (i.) Triviaal.

ii. Dit volgt onmiddellijk uit (i.).

iii. Dit volgt uit (ii) door op te merken dat het linkerlid en dus ook het rechterlid niet-negatief zijn.

iv. Volgens (i) en Gevolg 2.2(ii) is

$$\|x - \sum_{i=1}^{N} a_i e_i\|^2 = \|x - \sum_{i=1}^{N} \langle e_i, x\rangle e_i\|^2 + \|\sum_{i=1}^{N} (\langle e_i, x\rangle - a_i) e_i\|^2.$$

Hieruit volgt de bewering meteen. $\diamond$

Ongelijkheid (iii) heet de *ongelijkheid van Bessel.* Uit (iv) volgt dat de beste benadering van x in de lineaire deelruimte opgespannen door $e_1, \ldots, e_N$ wordt gegeven door $\sum_{i=1}^{N} \langle e_i, x\rangle e_i$. Verder volgt uit (iii) en (iv) dat het orthogonale stelsel $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ volledig is dan en slechts dan als

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle e_i, x\rangle|^2 \quad \text{voor alle } x \in H. \tag{2.1}$$

(2.1) heet de *identiteit van Parseval* of de *volledigheidsrelatie*. Uit (2.1) volgt ook dat het stelsel $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ volledig is dan en slechts dan als er geen $x \in H, x \neq 0$ is die orthogonaal is met alle e_i. Dit betekent ook dat $x \in H$ geheel bepaald is door de *Fouriercoëfficiënten* $\langle e_i, x\rangle$. De reeks $\sum_{i=1}^{\infty}\langle e_i, x\rangle e_i$ heet wel de (*gegeneraliseerde) Fourierreeks* van x. Merk op dat de Fouriercoëfficiënten niet geheel willekeurig kunnen worden gekozen, omdat ze aan de ongelijkheid van Bessel moeten voldoen en i.h.b. $\sum_{i=1}^{\infty}|\langle e_i, x\rangle|^2 < \infty$ moet zijn. Anderzijds geldt dat in het geval dat $H = L^2(\Omega)$ met $\Omega = [a, b] \in \mathbf{R}$ er voor elke rij getallen $c_1, c_2, \ldots$ waarvoor geldt dat $\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2 < \infty$, er een $g \in H$ bestaat zodat $c_i = \langle e_i, g\rangle$ voor alle i:

Stelling 2.7: (*Riesz-Fisher*) Laat $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ een rij getallen zijn zodanig dat $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$ convergeert, en H een Hilbertruimte met orthonormale basis $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Dan is er een unieke $x \in H$ waarvan de Fouriercoëfficiënten t.o.v. de basis $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ gelijk zijn aan de getallen c_n en $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$.

Bewijs: Laat voor $N = 1, 2, \ldots$: $x_N = \sum_{n=1}^{N} c_n e_n$. Omdat voor $M > N$ geldt dat $\|x_M - x_N\| = \sum_{n=N+1}^{M}|c_n|^2$, is de rij $\{x_n\}$ een fundamentaalrij. Wegens de volledigheid van H is er een x zodanig dat $\|x - x_n\| \to 0$ als $n \to \infty$. Kies een vaste m. Dan is voor $N \geq m$, $\langle e_m, x_N\rangle = c_m$ en dus, met de ongelijkheid van Schwarz,

$$|\langle e_m, x\rangle - c_m| = |\langle e_m, x - x_N\rangle| \leq \|x - x_N\| \to 0 \quad \text{als } N \to \infty$$

en dus is $\langle e_m, x\rangle = c_m$ voor alle m. Tenslotte is

$$\|x\|^2 = \lim_{N\to\infty}\|x_N\|^2 = \lim_{N\to\infty}\sum_{m,n=1}^{N}\overline{c_m}c_n\langle e_m, e_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2. \quad \diamond$$

Voorbeelden:

i. Laat $\Omega = [-1, 1]$. Een volledig orthonormaal stelsel op $L^2([-1, 1])$ wordt gegeven door de genormeerde Legendre-polynomen $\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Hierbij is P_n een polynoom van graad n met $P_n(1) = 1$ en $\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx = \delta_{mn}\dfrac{2}{2n+1}$.

ii. Op $L^2([-\pi, \pi])$ is het stelsel $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ waarbij $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$ een volledig orthonormaal stelsel. Laat $f(x) = e^{iax}$. Daar $\langle e_n, f\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-inx}e^{iax}dx = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}(-1)^n\dfrac{\sin a\pi}{a-n}$, is de Fourierreeks van f gelijk aan $\dfrac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin a\pi}{a-n}e^{inx}$. In dit geval geldt zelfs gelijkheid op $(-\pi, \pi)$ en voor $x = \pi$ geldt

$$\cos a\pi = \frac{e^{ia\pi} + e^{-ia\pi}}{2} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin a\pi}{a-n}$$

dus $\pi\cot a\pi = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{a-n} = \dfrac{1}{a} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a}{a^2-n^2}$.

iii. Voor $\Omega = \mathbf{R}$ en $w(x) = e^{-x^2}$ vormen de Hermite-polynomen H_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ een volledig *orthogonaal* stelsel t.a.v. het inproduct met gewichtsfunctie w, d.w.z. $\int_{\mathbf{R}}H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}dx = 0$ als $m, n \geq 0$, $m \neq n$.

Nu volgt het bewijs van Propositie 2.4:

Bewijs: Neem eerst aan dat W eindig-dimensionaal is. Als $\{f_1, \ldots, f_n\}$ een orthonormale basis is van W, dan is volgens Propositie 2.6(iv) $y = \sum_{k=1}^{n} \langle f_j, x \rangle f_j$ het unieke element van W met minimale afstand tot x en tevens is $y - x \in W^{\perp}$. Neem nu aan dat W oneindig-dimensionaal is. Laat $d = d(x, W)$. Er bestaat een rij $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ in W zodanig dat $d_n = \|x - y_n\|$ en $d_n \downarrow d$ als $n \to \infty$. Laat voor $m, n \in \mathbf{N}$ en $m > n$, $d_{m,n}$ de afstand zijn van x tot de lineaire deelruimte $W_{m,n}$ opgespannen door y_n en y_m. Dan is $d \leq d_{m,n} \leq d_m \leq d_n$. Omdat $W_{m,n}$ eindig-dimensionaal is, is er een $t \in W_{m,n}$ zodanig dat $\|x - t\| = d_{m,n}$. Dan volgt, omdat $x - t \in W_{m,n}^{\perp}$, m.b.v. de stelling van Pythagoras (Gevolg 2.2(ii)) dat

$$\|y_n - y_m\| \leq \|y_n - t\| + \|t - y_m\| = \sqrt{d_n^2 - d_{m,n}^2} + \sqrt{d_m^2 - d_{m,n}^2} \leq 2\sqrt{d_n^2 - d^2}.$$

Omdat het rechterlid naar 0 gaat als $m > n \to \infty$, is de rij $\{y_n\}$ een fundamentaalrij en heeft dus een limiet $y \in W$. Dan is $\|x - y\| = d$. Verder geldt voor $w \in W$

$$\|x - w\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - w\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x - y, y - w \rangle.$$

Als $x - y \notin W^{\perp}$ dan bestaat er een $w' \in W$ zodanig dat $\langle x - y, w' \rangle \neq 0$. Kies nu $w = y - \epsilon w'$, waarbij $\epsilon \in \mathbf{C}$ zodanig is gekozen dat $|\epsilon|^2 \|w'\|^2 + 2\mathrm{Re}\ \epsilon \langle x - y, w' \rangle < 0$. Maar dan is $\|x - w\| < \|x - y\| = d$, tegenspraak. Conclusie: $H = W + W^{\perp}$ en aangezien $W \cap W^{\perp} = \{0\}$, is $H = W \oplus W^{\perp}$ en $y = P_W(x)$ is de orthogonale projectie van x op W.

Tenslotte volgt uit $H = W^{\perp} \oplus W^{\perp\perp}$ en $W \subset W^{\perp\perp}$, dat $W = W^{\perp\perp}$. $\diamond$

Opmerking: Laat H en H' twee Hilbertruimten zijn met aftelbare orthonormale bases. Dan zijn H en H' isomorf in de zin dat er een vectorruimte-isomorfisme $\phi : H \to H'$ bestaat zodanig dat $\langle x, y \rangle_H = \langle \phi(x), \phi(y) \rangle_{H'}$. Als immers $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ orthonormale bases zijn van H resp. H', dan laat $\phi(e_n) = f_n$ en zet ϕ lineair en continu voort. Een Hilbertruimte H heet *separabel* als er een aftelbare deelverzameling W van H is zodanig dat H de afsluiting $\overline{W}$ is. Een Hilbertruimte H is separabel dan en slechts dan als H een eindige of aftelbare orthonormale basis heeft. Separabele Hilbertruimten zijn $\ell_2(K), L_2(a, b)$ en $L_2(a, b)_w$. Een orthonormale basis van $H = L_2(a, b)$ resp. $L_2(a, b)_w$ wordt verkregen door de verzameling polynomen $\{1, x, x^2, \ldots\}$ te orthonormaliseren (m.b.v. de methode van Gram-Schmidt) t.o.v. het inproduct in H. Dit laatste resultaat is (een speciaal geval van) de stelling van Stone-Weierstrasz. Op deze wijze ontstaan, voor verschillende gewichtsfuncties, de *orthogonale polynomen*, zoals de Legendre-polynomen (voor $w(x) = 1$ en $[a, b] = [-1, 1]$) en de Hermite-polynomen (met $w(x) = e^{-x^2}$ en $[a, b] = \mathbf{R}$).

§2.3 Klassieke Fourierreeksen.

Zij $a > 0$ een reëel getal en $f : [-a, a] \to \mathbf{C}$ een op $[-a, a]$ absoluut integreerbare functie (d.w.z. f en $|f|$ zijn integreerbaar op $[-a, a]$; stuksgewijs continue functies zijn i.h.b. absoluut integreerbaar). De (klassieke) Fourierreeks van f is gedefinieerd als $\lim_{N \to \infty} \sum_{k=-N}^{N} c_k \exp(ik\pi x/a)$, waarbij $c_k = \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int_{-a}^{a} f(\xi) \exp(-ik\pi\xi/a) d\xi$. De Fouriercoëfficiënten c_k zijn zo gedefinieerd dat als f een trigonometrisch polynoom is op $[-a, a]$, m.a.w. als $f(x) = \sum_{k=-N}^{N} d_k \exp(ik\pi x/a)$ dan geldt dat $d_k = c_k$, dus $f(x)$ is gelijk aan zijn eigen Fourierreeks. Merk op dat omdat de functies $\epsilon_k(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2a}} \exp(ik\pi x/a)$ een orthonormaal stelsel vormen op $L_2([-a, a])$, de klassieke Fourierreeks van een stuksgewijs continue functie op $[-a, a]$ gelijk is aan de gegeneraliseerde Fourierreeks m.b.t. het orthonormale stelsel $\{\epsilon_k(x)\}_{k=-\infty}^{\infty}$. De Fouriercoëfficiënten zijn op slechts een factor na in beide gevallen gelijk.

Voorbeeld: Beschouw op $[-\pi,\pi]$ de functie $f(x) = \begin{cases} (\pi - x)/2 & \text{als } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{als } x = 0, \pm\pi \\ (-\pi - x)/2 & \text{als } -\pi < x < 0 \end{cases}$. De Fouriercoëfficiënten van f zijn:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\pi - x)e^{-ikx}dx + \int_0^{\pi}(\pi - x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{ik} \quad (k \neq 0)$$

(de tweede gelijkheid geldt omdat de functie periodiek met periode 2π tot geheel $\mathbf{R}$ kan worden voortgezet) en $c_0 = 0$. De Fourierreeks is dan $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{ik} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$. De Fourierreeks representeert zo de functie op geheel $\mathbf{R}$. De Fourierreeks kan ook geschreven worden in termen van $\cos(k\pi x) = (e^{ikx} + e^{-ikx})/2$ en $\sin(k\pi x) = (e^{ikx} - e^{-ikx})/2i$ als $a_0/2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(k\pi x/a) + b_k \sin(k\pi x/a)$ waarbij $a_k = \displaystyle\frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(\xi)\cos(k\pi\xi/a)d\xi$ en $b_k = \displaystyle\frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(\xi)\sin(k\pi\xi/a)d\xi$. In het bovenstaande voorbeeld zijn de coëfficiënten $a_k = 0$ omdat f een oneven functie is.

Er zijn verschillende voorwaarden waaronder de klassieke Fourierreeks puntsgewijs resp. uniform naar f convergeert. We noemen zonder bewijs het volgende criterium:

Stelling 2.8 (convergentiecriterium van Dini): Laat $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ een stuksgewijs continue periodieke functie met periode $2a$ zijn. Als voor zekere $x_0 \in \mathbf{R}$ geldt dat de functie $\displaystyle\frac{f(x_0 + y) + f(x_0 - y)}{y} - s$ absoluut integreerbaar is op $[0, a]$, dan convergeert de Fourierreeks van $f(x)$ in x_0 puntsgewijs naar $s/2$. Als f bovendien continu is, dan is de convergentie zelfs uniform op $\mathbf{R}$.

Merk op dat aan de voorwaarden voldaan is als f stuksgewijs continu is en als f in x_0 rechts- en linksdifferentieerbaar is. $s/2$ is dan gelijk aan het gemiddelde van de linker- en rechterlimiet $(f(x_0+) + f(x_0-))/2$. In het geval van het voorbeeld geldt dus dat $\pi - x = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$ voor $0 < x < 2\pi$. De convergentie is echter niet uniform vanwege de discontinuïteiten.

§2.4. Begrensde operatoren.

Laat H, H' genormeerde vectorruimten zijn. Een lineaire operator van H naar H' is een afbeelding $T : D \to H'$ zodanig dat $T(\lambda f + \mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g)$ voor $f, g \in D \subset H$ en $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ of $\mathbf{C}$. Hierbij is D een gesloten lineaire deelruimte van H. D (of $D(T)$) heet het *domein* van T.

Voorbeelden.

1. Laat $H = \ell_2(K)$. De (links- en rechts)verschuivings-operatoren:

$$L(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots), \qquad R(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$$

zijn lineaire operatoren met als domein geheel H.

2. Zij H een Hilbertruimte. Voor $a \in H$ is de afbeelding $i_a : H \to \mathbf{C}$ gegeven door $i_a(x) = \langle a, x \rangle$ een lineaire operator.
3. Een paar voorbeelden voor het geval dat $H = L_2(a,b)$:

i. Voor $f \in H$ en $g \in H$ vast is $T(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx$ een lineaire operator van H naar K. Een dergelijke operator heet een *integraaloperator*.

ii. Laat D de verzameling van continue functies (preciezer: functies met een continue representant) in H zijn. Voor $c \in [a,b]$ is de *evaluatie-operator* $E_c(f) = f(c)$ een lineaire operator van H naar $\mathbf{R}$ resp. $\mathbf{C}$ met domein D.

iii. De differentiaaloperator $D = \frac{d}{dx}$ beeldt $f \in H$ af op zijn afgeleide $f' \in H$. Het domein is een echte deelverzameling van de verzameling van differentieerbare functies in H: laat $f(x) = \sqrt{x-a}$. Dan is $D(f)(x) = 1/(2\sqrt{x-a})$ dus $f \in L_2(a,b)$ maar Df ligt niet in $L_2(a,b)$ omdat $\int_a^b (x-a)^{-1} = \infty$.

Een bijzondere klasse van lineaire operatoren wordt gevormd door de begrensde operatoren: een lineaire operator $T : H \to H'$ heet *begrensd* indien er een $M > 0$ bestaat zodanig dat $\|T(f)\| < M$ voor alle $f \in H$ met $\|f\| \leq 1$. De norm van een begrensde operator T is gedefinieerd als

$$\|T\| = \sup_{\|f\|=1} \|Tf\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Tf\|}{\|f\|}. \tag{2.2}$$

Er geldt: als $S, T : H \to H'$ begrensd zijn, dan is $S + T$ begrensd en

$$\|S + T\| = \sup_{\|f\|=1} \|(S+T)f\| \leq \sup_{\|f\|=1} \|Sf\| + \|Tf\| = \|S\| + \|T\|$$

en ook is $\|aS\| = |a|\|S\|$ als $a \in K$. De begrensde operatoren $T : H \to H'$ vormen dus zelf een genormeerde vectorruimte $\mathcal{B}(H, H')$. Als $H = H'$ dan vormen de begrensde operatoren (met de compositie als vermenigvuldiging) een algebra en we noteren dan $\mathcal{B}(H)$.

De operatornorm heeft nog een extra eigenschap t.o.v. een gewone norm: voor $S \in \mathcal{B}(H, H')$ en $T \in \mathcal{B}(H', H'')$: $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$. Immers, voor $x \in H$ is $\|STx\| \leq \|S\|Tx\| \leq \|S\|\|T\|\|x\|$.

Propositie 2.9: Als H' een Banachruimte is, dan is $\mathcal{B}(H, H')$ zelf een Banachruimte.

Bewijs: Laat $\{T_n\}$ een fundamentaalrij van lineaire operatoren in $\mathcal{B}(H, H')$ zijn. Voor $x \in H$ is $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\|$, dus $\{T_n(x)\}$ is een fundamentaalrij in H'. Omdat H' volledig is, heeft de rij een limiet $T(x)$. Het is nu eenvoudig om na te gaan dat T een lineaire operator is en dat $\|T\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n\|$. I.h.b. is T begrensd. $\diamond$

Voorbeelden:
1. Op een eindig-dimensionale vectorruimte is elke lineaire afbeelding begrensd.
2. Laat $H = \ell_2$. Beschouw de (links- en rechts)verschuivings-operatoren:

$$L(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots), \qquad R(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$$

Er geldt dat $L, R \in \mathcal{B}(H)$ en $\|L\| = \|R\| = 1$.
3. De operator $id_H : H \to H$ die elke $v \in H$ op zichzelf afbeeldt, is begrensd met norm 1.
4. Voor H een Hilbertruimte is voor $v \in H$ de operator $i_v : H \to K$ gedefinieerd door $i_v(x) = \langle v, x \rangle$. Volgens de ongelijkheid van Schwarz is $|i_v(x)| \leq \|v\|\|x\|$. Anderzijds is $i_v(v) = \|v\|^2$. i_v is dus een begrensde operator en $\|i_v\| = \|v\|$.

5. De evaluatie-operator E_c en de differentiaaloperator $\frac{d}{dx}$ op $L_2(a,b)$ zijn niet begrensd. (Zie de opgaven.)

Propositie 2.10: Laat H, H' genormeerde vectorruimten zijn. Een lineaire operator $T : H \to H'$ is begrensd dan en slechts dan als T continu is.

Bewijs: Stel dat T begrensd is. Voor $x, y \in H$ is $\|T(x) - T(y)\| \leq \|T\|\|x - y\|$, dus T is continu. Omgekeerd, stel $T : H \to H'$ is niet begrensd; dan is er een rij $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ met $y_i \in H$ en $\|y_i\| = 1$ zodat $\|T(y_i)\| = a_i \to \infty$. Dan $\|y_i/a_i\| \to 0$ maar $\|T(y_i/a_i)\| = 1$, dus is T niet continu. $\diamond$

Gevolg: Zij $T \in \mathcal{B}(H, H')$. Dan is $\ker(T) = \{x \in H : T(x) = 0\}$ een gesloten deelruimte van H.

Bewijs: Laat $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ een Cauchyrij in $\ker(T)$ zijn. De rij heeft een limiet $x \in H$. Omdat T continu is, is $T(x) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = 0$ en dus $x \in \ker(T)$.

We bekijken voorbeeld 4 nog wat nader. De ruimte $H^* = \mathcal{B}(H, K)$ heet de *duaal* van H. H^* bevat alle operatoren van de vorm i_v met $v \in H$. Omgekeerd geldt ook:

Stelling 2.11: (*representatiestelling van Riesz*) Voor elke $f \in H^*$ bestaat er een $v \in H$ zodanig dat $f = i_v$.

Bewijs: Als $f = 0$, dan is $v = 0$. Als $f \neq 0$, dan is de dimensie van $(\ker(f))^{\perp}$ gelijk aan 1. Immers als $x, y \in (\ker(f))^{\perp}$, dan is $f(x)y - f(y)x \in \ker(f)$ en dus is $f(x)y - f(y)x = 0$ m.a.w. x, y zijn lineair afhankelijk. Kies $w \in (\ker(f))^{\perp}$ zodanig dat $\|w\| = 1$. Nu is $v = w\overline{f(w)}$: immers is $f(w) = \langle v, w\rangle$ en als $x \in \ker(f)$, dan is $f(x) = 0$ en $\langle v, x\rangle = 0$. Omdat $\ker(f)$ gesloten is, is $H = \ker(f) \oplus (\ker(f))^{\perp}$. Omdat f en i_v lineair zijn en overeenstemmen op $\ker(f)$ en $(\ker(f))^{\perp}$, stemmen ze overeen op H. $\diamond$

Opmerking: Op H^* kunnen we een inproduct definiëren d.m.v. $\langle i_v, i_w\rangle = \langle w, v\rangle$. H^* wordt zo een Hilbertruimte. Elke Hilbertruimte is isomorf met zijn eigen duaal: $\phi : H \to H^*$ zodanig dat $\phi(v) = i_v$ een (antilineair) isomorfisme van Hilbertruimten is dat het inproduct op complexe conjugatie na invariant laat: $\langle v, w\rangle = \langle \phi(w), \phi(v)\rangle$.

Definitie. $T \in \mathcal{B}(H)$ heet *inverteerbaar* (op $\mathcal{B}(H)$) als T bijectief is en als $T^{-1} \in \mathcal{B}(H)$. $\lambda \in \mathbf{C}$ heet een *regulier punt* van T als de operator $T - \lambda \cdot id_H$ inverteerbaar is. De verzameling $\rho(T)$ van reguliere punten van T heet de *resolvente verzameling* van T. Het complement $\sigma(T) = \mathbf{C}\backslash\rho(T)$ heet het *spectrum* van T. Merk op dat $\sigma(T)$ de eigenwaarden van T bevat (dit zijn de complexe getallen λ zodanig dat $T(x) = \lambda x$ voor zekere $\lambda \in H$), maar groter kan zijn.

Uit het volgende lemma volgt dat $\sigma(T)$ een begrensde deelverzameling van $\mathbf{C}$ is.

Lemma 2.12: (a) Laat $T \in \mathcal{B}(H)$ en $\|T\| < |\lambda|$. Dan is $T - \lambda \cdot id_H$ begrensd en inverteerbaar en $(T - \lambda \cdot id_H)^{-1} = -\dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$.

(b) Als $S, T \in \mathcal{B}(H)$ en T is inverteerbaar en $\|T - S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$, dan is S inverteerbaar.

Bewijs: (a) Daar $\|T/\lambda\| < 1$, is $\sum_{n=0}^{\infty}\|T\|^n/|\lambda|^n$ een convergente reeks en de limiet van een rij begrensde operatoren is zelf een begrensde operator volgens Propositie 2.9 m.a.w. $S = \sum_{n=0}^{\infty}(T/\lambda)^n$ is begrensd. Verder geldt dat

$$(T - \lambda \cdot id_H)\sum_{n=0}^{N}(T/\lambda)^n = -\lambda\left(id_H - (T/\lambda)^{N+1}\right) = \sum_{n=0}^{N}(T/\lambda)^n(T - \lambda \cdot id_H)$$

en door de limiet voor $N \to \infty$ te nemen zien we dat $(T - \lambda \cdot id_H)S = -\lambda \cdot id_H$.

(b.) $\|ST^{-1} - id_H\| \leq \|T^{-1}\|\|S - T\| < 1$ dus volgens (a) is ST^{-1} inverteerbaar. Maar dan is S bijectief en $S^{-1} = T^{-1}(ST^{-1})^{-1}$, dus is S^{-1} begrensd. $\diamond$

Gevolg 2.13: Zij $T \in \mathcal{B}(H)$. Het spectrum $\sigma(T)$ is een begrensde en gesloten verzameling.

Bewijs: Uit lemma 2.12(a) volgt dat voor $\lambda \in \sigma(T)$ geldt dat $|\lambda| \leq \|T\|$. Uit (b) volgt dat als $\lambda \in \rho(T)$, en $|\mu - \lambda| < \|T^{-1}\|^{-1}$, dan $\mu \in \rho(T)$. Dus $\rho(T)$ is een open verzameling. $\diamond$

Opmerking: Het spectrum bevat in elk geval de eigenwaarden van een operator: als $T(x) = \lambda x$ voor zekere $x \neq 0$ en $\lambda \in \mathbf{C}$, dan is $T - \lambda \cdot id$ niet inverteerbaar. Het spectrum kan echter groter zijn dan de verzameling eigenwaarden. Beschouw de right-shift $R : \ell_2 \to \ell_2$. Het is niet moeilijk om na te gaan dat R geen eigenwaarden heeft. Maar omdat het beeld van R het orthogonaal complement van het opspansel van $e_1 = (1, 0, \ldots)$ is, is R niet-inverteerbaar, en dus is $0 \in \sigma(R)$. In feite geldt zelfs: $\sigma(R) = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq 1\}$.

Laat H, H' Hilbertruimten zijn en $T \in \mathcal{B}(H, H')$. Voor elke $x \in H'$ is de afbeelding $y \to \langle x, Ty \rangle$ een begrensde afbeelding van H naar K, dus een element van H^*. Volgens stelling 2.10 is er dan een $v \in H$ zodanig dat $\langle x, Ty \rangle = \langle v, y \rangle$ voor $y \in H$. We schrijven $v = T^\dagger x$. Er geldt dus

$$\langle x, Ty \rangle = \langle T^\dagger x, y \rangle \qquad (y \in H, x \in H'). \tag{2.3}$$

$T^\dagger : H' \to H$ heet de *geadjungeerde* van T. Het is eenvoudig om in te zien dat $T^\dagger$ een lineaire operator is en dat $T^{\dagger\dagger} = T$. Bovendien is $T^\dagger$ begrensd. Er geldt nl:

Lemma 2.14: Als $T \in \mathcal{B}(H, H')$ dan $T^\dagger \in \mathcal{B}(H', H)$ en $\|T\| = \|T^\dagger\|$.

Bewijs: Dit volgt onmiddellijk uit het feit dat

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle x, Ty \rangle|. \tag{2.4}$$

We bewijzen (2.4): zij $x \in H'$ en $y \in H$ met $\|x\| = \|y\| = 1$. Dan is $|\langle x, Ty \rangle| \leq \|x\|\|Ty\| \leq \|T\|$. Kies verder $x = Ty/\|Ty\|$. Dan is $\langle x, Ty \rangle = \|Ty\|$, en dus is $\sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle x, Ty \rangle| \leq \sup_{\|y\|=1} \|Ty\| = \|T\|$. $\diamond$

Definitie: $T \in \mathcal{B}(H)$ heet *zelfgeadjungeerd* of *hermites* als $T = T^\dagger$.

Propositie 2.15: Zij $T \in \mathcal{B}(H, H')$. Dan geldt

$$\ker(T^\dagger) = (\mathrm{im}(T))^\perp, \qquad \mathrm{im}(T^\dagger) \subset (\ker(T))^\perp.$$

Als $\mathrm{im}(T^\dagger)$ gesloten is, dan geldt zelfs $\mathrm{im}(T^\dagger) = (\ker(T))^\perp$.

Bewijs: Zij $x \in \ker(T^\dagger)$. Dan is $\langle x, Ty \rangle = \langle T^\dagger x, y \rangle = 0$ voor alle $y \in H$. Dus is $x \in (\mathrm{im}(T))^\perp$. De redenering geldt ook in omgekeerde richting. Stel nu $y = T^\dagger z$ voor zekere $z \in H'$ en laat $x \in \ker(T)$. Dan is

$$\langle y, x \rangle = \langle T^\dagger z, x \rangle = \langle z, Tx \rangle = 0.$$

Als $\mathrm{im}(T^\dagger)$ gesloten is, dan geldt: $\mathrm{im}(T^\dagger) = \left(\mathrm{im}(T^\dagger)\right)^{\perp\perp} = (\ker(T))^\perp$ volgens Propositie 2.4 en de eerste identiteit (waarbij we gebruiken dat $T^{\dagger\dagger} = T$). $\diamond$

§2.5. Compacte operatoren.

Laat H, H' Banachruimten zijn. Een begrensde operator $T : H \to H'$ heet *compact* als voor elke begrensde rij $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ in H de rij van beelden $\{T(x_n)\}_{n=1}^\infty$ een convergente deelrij in H' heeft.

Voorbeelden:

i. Als H, H' eindig-dimensionaal zijn, dan is het beeld van de eenheidsbol $\{x \in H : \|x\| = 1\}$ onder de continue afbeelding T begrensd en gesloten in H', en dus compact. Elke lineaire operator in $\mathcal{B}(H, H')$ is dus compact.

ii. Een lineaire operator $T \in \mathcal{B}(H, H')$ waarvan de dimensie van het beeld $T(H)$ eindig is, heet een operator van eindige rang. Operatoren van eindige rang zijn compact. We geven een voorbeeld van zo'n operator: laat $a, b \in \mathbf{R}$, $H = L_2([a, b])$, laat $K(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\phi_i(x)} \psi_i(y)$ waarbij $\phi_i, \psi_i : [a, b] \to \mathbf{C}$ continue functies zijn. De lineaire operator $T : H \to H$ gegeven door $T(f)(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy$ is compact.

iii. Laat H een oneindig-dimensionale Hilbertruimte zijn. Dan is de identiteitsoperator id_H begrensd, maar niet compact. Immers, kies een orthonormaal stelsel $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dan is voor $n \neq m$: $\|Te_n - Te_m\| = \|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$. De rij $\{Te_n\}$ bevat dus geen convergente deelrij.

iv. Een operator $K : H \to H$ heet een *Hilbert-Schmidtoperator* als $\mathrm{tr}(K^\dagger K)$ eindig is. Hilbert-Schmidtoperatoren zijn compact. Een voorbeeld van een Hilbert-Schmidtoperator is de operator $K : L_2([a, b]) \to L_2([a, b])$ gegeven door $Kf(x) = \int_a^b K(x, t) f(t) dt$ waarbij $a, b \in \mathbf{R}$ en $K : [a, b] \times [a, b] \to \mathbf{C}$ een continue functie is. Laat nl. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ een orthonormale basis zijn van de Hilbertruimte. Dan is

$$\mathrm{tr}(K^\dagger K) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle K f_n, K f_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \int_a^b \int_a^b \overline{K(x, t)} K(x, u) \overline{f_n(t)} f_n(u) du dt dx =$$

$$= \int_a^b \int_a^b \overline{K(x, t)} K(x, t) dt dx < \infty.$$

Propositie 2.16: Laat H, H' Hilbertruimten zijn. Zij $\{K_n : H \to H'\}_{n=1}^{\infty}$ een convergente rij compacte operatoren. Dan is $K = \lim_{n\to\infty} K_n$ compact.

Bewijs: Zij $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ een begrensde rij in H en $\|x_n\| \leq M$. Dan heeft de rij $\{K_1 x_n\}$ een convergente deelrij $\{K_1 x_n^{(1)}\}$. De rij $\{K_2 x_n^{(1)}\}$ heeft een convergente deelrij $\{K_2 x_n^{(2)}\}$. In het algemeen is voor $m = 1, 2, \ldots$ de rij $\{K_m x_n^{(m)}\}$ convergent en $\{x_n^{(m)}\}$ is een deelrij van $\{x_n^{(m-1)}\}$. Beschouw nu de rij $\{y_n = x_n^{(n)}\}$. Dit is een deelrij van $\{x_n\}$ en de rijen $\{K_m y_n\}$ convergeren voor elke m. Kies nu $\epsilon > 0$ en N zo groot dat $\|K - K_N\| < \epsilon/M$. Kies N' zo groot dat voor $m > n \geq N'$ geldt dat $\|K_N y_n - K_N y_m\| < \epsilon$. Dan is voor $m > n \geq N'$

$$\|Ky_n - Ky_m\| \leq \|Ky_n - K_N y_n\| + \|K_N y_n - K_N y_m\| + \|K_N y_m - Ky_m\| < \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon.$$

De rij $\{Ky_n\}$ is dus een fundamentaalrij en dus convergent. $\diamond$

Voorbeeld: Laat $K : \ell_2 \to \ell_2$ gegeven zijn door $K(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, x_2/2, x_3/3, \ldots)$. Dan is $K = \lim_{n\to\infty} K_n$ waarbij $K_n(x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2/2, \ldots, x_n/n, 0, 0, \ldots)$ van eindige rang is. Dus is K compact.

Men kan aantonen dat elke compacte operator $K = \mathcal{B}(H)$ voor H een Hilbertruimte de limiet is van een rij operatoren van eindige rang. Dit geldt niet in het geval dat H een Banachruimte is. Omdat de geadjungeerde van een eindige-rangoperator weer van eindige rang is en $K^\dagger = \lim_{n\to\infty} K_n^\dagger$ als $K = \lim_{n\to\infty} K_n$, geldt:

Propositie 2.17: Als $K \in \mathcal{B}(H)$ een compacte operator is met geadjungeerde $K^\dagger$, dan is $K^\dagger$ compact.

Voor het spectrum van een compacte operator geldt nu het volgende resultaat:

Stelling 2.18 *(spectraalstelling voor compacte operatoren):* Zij H een oneindig-dimensionale Hilbertruimte en $K \in \mathcal{B}(H)$ een compacte operator. Dan zijn de volgende beweringen waar:

a. $0 \in \sigma(K)$.

b. $\mathrm{Ker}(K - \lambda \cdot id_H)$ is eindig-dimensionaal als $\lambda \neq 0$.

c. Als $\lambda \neq 0$, dan is hetzij $\lambda \in \rho(K)$ of λ is een eigenwaarde van K.

d. $\sigma(K)$ is hetzij een eindige verzameling hetzij een aftelbaar oneindige begrensde verzameling met 0 als enige ophopingspunt.

Om de spectraalstelling te bewijzen, tonen we eerst een aantal deelresultaten aan.

Propositie 2.19: Laat $S, K \in \mathcal{B}(H)$ waarbij bovendien K een compacte operator is. Dan zijn de operatoren SK en KS compact.

Bewijs: Zij $\{x_n\}$ een begrensde rij in H. Dan is $\{Sx_n\}$ ook begrensd en dus heeft $\{KSx_n\}$ een convergente deelrij. KS is dus compact. Ook heeft $\{Kx_n\}$ een convergente deelrij $\{Kx_{n_j}\}$ met limiet y. Omdat S begrensd is, convergeert de rij $\{SKx_{n_j}\}$ dan naar Sy. Dus is SK een compacte operator. $\diamond$

Stelling 2.20: Zij $K \in \mathcal{B}(H)$ een compacte operator en $\lambda \neq 0$ een complex getal. We schrijven id voor id_H.

i. Laat $K_\lambda^{(m)} = \mathrm{Ker}(K - \lambda \cdot id)^m$ voor $m = 1, 2, \ldots$. Dan breekt de rij van inclusies $K_\lambda^{(1)} \subset K_\lambda^{(2)} \subset \ldots$ na eindig veel stappen af, m.a.w. er is een q zodat $K_\lambda^{(q)} = K_\lambda^{(q+1)}$. Verder zijn de deelruimten $K_\lambda^{(m)}$ eindig-dimensionaal en dus gesloten.

ii. Laat $R_\lambda^{(m)} = \mathrm{Im}(K - \lambda \cdot id)^m$ voor $m = 1, 2, \ldots$. Dan is $R_\lambda^{(r)}$ gesloten als $r \geq q$ (met q als in (i)). Verder breekt de rij van inclusies $R_\lambda^{(1)} \supset R_\lambda^{(2)} \supset \ldots$ na eindig veel stappen af, m.a.w. er is een r zodat $R_\lambda^{(r)} = R_\lambda^{(r+1)}$.

iii. Laat q resp. r de kleinste getallen zijn zodat in de rij inclusies in (i) en (ii) gelijkheid optreedt. Dan is $q = r$. Verder is $H = K_\lambda^{(q)} \oplus R_\lambda^{(q)}$.

Bewijs: (i.) Stel dat de dimensie van $K_\lambda^{(1)}$ oneindig is. Dan is er een orthonormaal stelsel $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots\}$ in $K_\lambda^{(1)}$ (merk op dat we zo'n orthonormaal stelsel m.b.v. de methode van Gram-Schmidt kunnen maken). $\mathcal{B}$ is een begrensde verzameling; anderzijds is $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ voor $n \neq m$, en dus is $\|Ke_n - Ke_m\| = \sqrt{2}|\lambda|$. De rij $\{Ke_n\}$ heeft dus geen convergente deelrij. Tegenspraak. Aangezien volgens Prop.2.19 $(K - \lambda \cdot id)^m = (K_m + (-\lambda)^m \cdot id)$ met K_m compact, is ook $\dim K_\lambda^{(m)}$ eindig voor $m > 1$. In het bijzonder zijn de lineaire deelruimten $K_\lambda^{(m)}$ gesloten. Het is nu eenvoudig in te zien, dat als $K_\lambda^{(q)} = K_\lambda^{(q+1)}$, dan is ook $K_\lambda^{(q+j)} = K_\lambda^{(q+j+1)}$ voor $j \geq 1$. Als de rij $K_\lambda^{(1)} \subset K_\lambda^{(2)} \subset \ldots$ niet afbreekt, dan bestaat er dus (volgens Propositie 2.4) een orthonormaal stelsel vectoren $\{f_1, f_2, \ldots\}$ met $f_m \in K_\lambda^{(m)}$ en $f_m \in (K_\lambda^{(m-1)})^\perp$. Dan is $Kf_m = \lambda f_m + g_m$ met $g_m \in K_\lambda^{(m-1)}$ dus voor $n > m$ is $\|K(f_n - f_m)\| = \|\lambda f_n + h_n\| \geq |\lambda|$ waarbij $h_n \in K_\lambda^{(n-1)}$. De rij $\{Kf_n\}$ heeft dus geen convergente deelrij, tegenspraak.

ii. Laat q het kleinste getal zijn zo dat $K_\lambda^{(q)} = K_\lambda^{(q+1)}$. We tonen aan dat $R_\lambda^{(r)}$ gesloten is voor $r \geq q$. Laat hiertoe $\{x_n\}$ een begrensde rij in $R_\lambda^{(r)}$ zijn die convergeert naar $x \in H$. Dan is $x_n = (K - \lambda)^r y_n$. Omdat $K_\lambda^{(r)}$ gesloten is, is $H = K_\lambda^{(r)} \oplus (K_\lambda^{(r)})^\perp$ en dus kunnen we $y_n \in (K_\lambda^{(r)})^\perp$ kiezen. Als de rij $\{y_n\}$ een begrensde deelrij $\{y'_n\}$ heeft, dan convergeert $((K - \lambda \cdot id)^r - (-\lambda)^r) y''_n = K_r y''_n$ voor een deelrij $\{y''_n\}$ van $\{y'_n\}$ naar een limiet y (K_r is compact). Maar dan convergeert de rij $\{y''_n\}$ zelf naar

$y' = (x-y)(-\lambda)^{-r}$ en dus is $x = (K-\lambda)^r y'$ en $x \in R_\lambda^{(r)}$. Als de rij $\{y_n\}$ geen begrensde deelrij heeft, dan is $\lim_{n\to\infty} \|y_n\| = \infty$, en als $w_n = y_n/\|y_n\|$, dan $(K-\lambda)w_n = (K_r - (-\lambda)^r)w_n \to 0$ voor $n \to \infty$. Anderzijds heeft de rij $\{K_r w_n\}$ een convergente deelrij $\{K_r w_n'\}$. Maar dan convergeert de rij $\{w_n'\}$. Noem de limiet w. Dan geldt $\|w\| = 1$, $Kw = \lambda w$ en $w \in (K_\lambda^{(r)}) \cap (K_\lambda^{(r)})^\perp = \{0\}$. Tegenspraak. Het bewijs dat de rij inclusies $R_\lambda^{(1)} \supset R_\lambda^{(2)} \supset \ldots$ afbreekt verloopt analoog aan het bewijs voor $K_\lambda^{(m)}$.

iii. Laat $x \in K_\lambda^{(q)} \cap R_\lambda^{(q)}$. Dan is $x = (K-\lambda)^q y$ en $(K-\lambda)^q x = 0$. Dan is $(K-\lambda)^{2q} y = 0$, dus $x = (K-\lambda)^q y = 0$. Laat nu $x \in K_\lambda^{(q)}$, $x \notin K_\lambda^{(q-1)}$. Dan $y = (K-\lambda)^{q-1} x \in R_\lambda^{(q-1)} \cap K_\lambda^{(1)}$. Als $R_\lambda^{(q)} = R_\lambda^{(q-1)}$, dan is $y = (K-\lambda)^q w$ voor zekere w en uit $w \in K_\lambda^{(q+1)} = K_\lambda^{(q)}$ volgt dan dat $y = 0$, tegenspraak. Conclusie: $r \geq q$. We tonen nu aan dat $H = K_\lambda^{(q)} + R_\lambda^{(m)}$ voor alle $m \geq 1$. Laat $x \notin K_\lambda^{(q)} = K_\lambda^{(r)}$, en laat $y = (K-\lambda)^r x$. Dan is er een w zodanig dat $y = (K-\lambda)^{r+1} w$ en dus is $(K-\lambda)^r((K-\lambda)w - x) = 0$. Dus $x = (K-\lambda)w + x'$ met $x' \in K_\lambda^{(q)}$, dus $H = R_\lambda^{(1)} + K_\lambda^{(q)}$. Laat nu $x \in R_\lambda^{(1)}$. Dan is $x = (K-\lambda)y$ met $y \in H$ dus $y = y' + y''$ met $y' \in R_\lambda^{(1)}$, $y'' \in K_\lambda^{(q)}$ zodat $R_\lambda^{(1)} = R_\lambda^{(2)} + K_\lambda^{(q)}$ en dus ook $H = R_\lambda^{(2)} + K_\lambda^{(q)}$. Zo verdergaand vinden we dat $H = R_\lambda^{(m)} + K_\lambda^{(q)}$ voor alle $m \geq 1$ en i.h.b. is voor $m \geq q$ de som een directe som $H = R_\lambda^{(m)} \oplus K_\lambda^{(q)}$. Maar omdat tevens $R_\lambda^{(m+1)} \subset R_\lambda^{(m)}$ voor alle m, is $R_\lambda^{(q)} = R_\lambda^{(q+1)}$ en dus is $r \leq q$. Conclusie: $q = r$ en $H = R_\lambda^{(q)} \oplus K_\lambda^{(q)}$. ◇

Bewijs van Stelling 2.18:

a. Zij K een compacte operator. Als K niet-inverteerbaar is, dan ligt 0 in $\sigma(K)$. Als K inverteerbaar is, en K^{-1} begrensd, dan is $KK^{-1} = id_H$ compact volgens Propositie 2.19, maar dit is in tegenspraak met voorbeeld (ii). Dus K^{-1} is niet begrensd en $0 \in \sigma(K)$.

b. Dit volgt direct uit Stelling 2.20.

c. Laat $\lambda \neq 0$. Neem aan dat $\lambda \in \sigma(K)$. Dan is hetzij λ een eigenwaarde van K of $(K-\lambda)$ is bijectief maar $(K-\lambda)^{-1}$ is niet begrensd. In het laatste geval is er een rij $\{x_n\}$ met $\|x_n\| = 1$ zodanig dat $(K-\lambda)x_n$ naar 0 convergeert. Omdat K compact is, is er een convergente deelrij $\{Kx_n'\}$ van $\{Kx_n\}$. Maar dan convergeert de rij $\{x_n'\}$ naar een element x met $\|x\| = 1$ en $(K-\lambda)x = 0$. Maar dan is $K - \lambda \cdot id$ niet bijectief, dus dit geeft een tegenspraak.

d. Laat $\lambda \neq 0$ en laat $K_\lambda : R_\lambda^{(q)} \to R_\lambda^{(q)}$ de restrictie zijn van K tot $R_\lambda^{(q)}$. Volgens stelling 2.20(iii) is λ geen eigenwaarde van K_λ, verder is K_λ compact omdat $R_\lambda^{(q)}$ gesloten is. Volgens (c) is dan $\lambda \in \rho(K_\lambda)$ en omdat $\rho(K_\lambda)$ open is, is λ geen verdichtingspunt van $\sigma(K_\lambda)$.
Verder geldt: als $\mu \neq \lambda, \mu \neq 0$ in $\sigma(K)$ ligt, dan is het een eigenwaarde van K, en dus ook een eigenwaarde van K_λ: immers stel $Kx = \mu x$ voor zekere $x \in H, x \neq 0$. Dan is $(K-\lambda)^q x = (\mu - \lambda)^q x \neq 0$ en $(K-\lambda)^q x \in R_\lambda^{(q)}$, en dus ook $x \in R_\lambda^{(q)}$. Maar dan is $\mu \in \sigma(K_\lambda)$. Conclusie: λ is geen verdichtingspunt van $\sigma(K)$. ◇

Opmerking: Er zijn compacte operatoren zonder eigenwaarden. In dit geval bestaat het spectrum alleen uit het nulelement. Een voorbeeld is de Hilbertruimte $H = \ell_2(\mathbf{C})$ met $K \in \mathcal{B}(H)$ gedefinieerd door $K(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2/2, x_3/3, \ldots)$.

§2.6. De spectraalstelling voor compacte zelfgeadjungeerde en normale operatoren.

Als H een Hilbertruimte is en $K \in \mathcal{B}(H)$ is zowel compact als zelfgeadjungeerd, dan geldt het volgende resultaat:

Stelling 2.21: Zij K een compacte zelfgeadjungeerde operator op een Hilbertruimte H. Dan geldt:

i. K heeft een eigenwaarde.

ii. Alle eigenwaarden van K zijn reëel.

iii. Eigenvectoren behorende bij verschillende eigenwaarden van K zijn orthogonaal.

iv. $H = H_0 \oplus \overline{W}$ waarbij $W = \oplus_{\lambda \neq 0} H_\lambda$ en waar $H_\lambda = \mathrm{Ker}(K - \lambda \cdot id)$ de eigenruimte is bij eigenwaarde λ.

v. Voor $x \in H$ geldt dat

$$Kx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (e_k, x) e_k \tag{2.5}$$

waarbij $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ de eigenwaarden ongelijk aan 0 van K zijn, met multipliciteit geteld en $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ een orthonormaal stelsel is van eigenvectoren bij de eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$.

Bewijs:

i. Omdat K begrensd is, bestaat $k = \sup_{\|x\|=1} \langle x, Kx \rangle$ en $\ell = \inf_{\|x\|=1} \langle x, Kx \rangle$. Als $k = \ell = 0$, dan is $\langle x, Kx \rangle = 0$ voor alle $x \in H$. Omdat K zelfgeadjungeerd is, is dan ook $\langle x, Ky \rangle = 0$ voor alle $x, y \in H$ en K is de nuloperator. In het andere geval kunnen we aannemen dat $k \neq 0$ (door zo nodig $-K$ i.p.v. K te beschouwen). Er is dan een rij $\{x_n\}$ met $\|x_n\| = 1$ zodanig dat $k_n = (x_n, Kx_n)$ en $k_n \uparrow k$. De operator $L = k \cdot id - K$ is begrensd en positief semi-definiet (d.w.z. $(x, Lx) \geq 0$ voor alle $x \in H$). Dan is $(x, y) := \langle x, Ly \rangle$ een semi-inproduct en dus geldt de ongelijkheid van Schwarz: $|(y, Lx)|^2 \leq (y, Ly)(x, Lx)$. Nu geldt voor $y \in H, \|y\| = 1$:

$$|\langle y, Lx_n \rangle| \leq \langle x_n, Lx_n \rangle \langle y, Ly \rangle \leq (k - k_n) \|L\|.$$

Als $Lx_n = 0$, dan is $Kx_n = kx_n$ en zijn we klaar. Als $Lx_n \neq 0$, dan vinden we door $y = Lx_n / \|Lx_n\|$ te nemen dat

$$\|Lx_n\| = \|Kx_n - kx_n\| \leq (k - k_n)\|L\|$$

dus de rij $\{Kx_n - kx_n\}$ convergeert naar het nulelement. Anderzijds is er, omdat K compact is, een deelrij $\{x'_n\}$ zodanig dat Kx'_n convergeert. Noem de limiet z. Merk op dat $z \neq 0$ omdat $k \neq 0$ is (anders convergeert de rij $\{kx'_n\}$ naar 0, tegenspraak). Nu convergeert $\{K^2 x'_n - kKx'_n\}$ enerzijds naar 0, en anderzijds naar $Kz - kz$. Dus $Kz = kz$ en z is een eigenvector bij eigenwaarde k.

ii. Laat λ een eigenwaarde van K zijn en $Kx = \lambda x$, $x \neq 0$, dan is

$$\lambda(x, x) = (x, Kx) = (Kx, x) = \overline{\lambda}(x, x)$$

dus $\lambda = \overline{\lambda}$.

iii. Laat λ en μ verschillende eigenwaarden zijn en laat $Kx = \lambda x$, $Ky = \mu y$ en $\lambda \neq \mu$. Dan $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ en

$$\lambda(x, y) = (Kx, y) = (x, Ky) = \mu(x, y)$$

en dus is $(x, y) = 0$.

iv. Omdat volgens stelling 2.18 $\lambda = 0$ het enige verdichtingspunt is van eigenwaarden en de eigenruimten bij de andere eigenwaarden eindig-dimensionaal zijn, en verder de eigenruimten H_λ bij verschillende eigenwaarden orthogonaal zijn, zijn er hoogstens aftelbaar veel eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ en is de directe som $W = \oplus_{k=0}^{\infty} H_{\lambda_k}$ goed gedefinieerd, waarbij de som is genomen over alle eigenwaarden λ_k (waarbij $\lambda_0 = 0$). Laat $\overline{W}$ de afsluiting van W zijn. Dan is $H = \overline{W} \oplus \overline{W}^{\perp}$. We tonen aan dat $\overline{W}^{\perp}$ gelijk is aan de nulruimte $\{0\}$. Omdat $K(W) \subset W$ en K continu is, is ook $K(\overline{W}) \subset \overline{W}$. Dan geldt, voor willekeurige $x \in \overline{W}$ en $y \in \overline{W}^{\perp}$, dat $(x, Ky) = (Kx, y) = 0$, m.a.w. $K(\overline{W}^{\perp}) \subset \overline{W}^{\perp}$. Laat nu $K_0 : \overline{W}^{\perp} \to \overline{W}^{\perp}$ de restrictie van K tot $\overline{W}^{\perp}$ zijn. K_0 is weer compact en zelfgeadjungeerd en heeft een eigenwaarde k. Maar dan is k ook een eigenwaarde van K en een eigenvector x van K_0 is bevat in W. Dit is een tegenspraak, tenzij $\overline{W}^{\perp} = \{0\}$.

v. Volgens het voorgaande is $x \in H$ te schrijven als

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, x \rangle e_k$$

waarbij $x_0 \in H_0$ en $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ een (aftelbare) orthonormale basis is van eigenvectoren bij eigenwaarden $\lambda_k \neq 0$ (de dimensie van $H_0 = \mathrm{Ker}(K)$ kan overaftelbaar zijn!). Daar $Kx_0 = 0$, is

$$Kx = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, x \rangle K e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle e_k, x \rangle e_k. \qquad \diamond$$

Normale operatoren. *Definitie:* Een operator $T \in \mathcal{B}(H)$ heet *normaal* als $TT^{\dagger} = T^{\dagger}T$.

Lemma 2.22: T is normaal dan en slechts dan als $T = U + iV$ met $U, V \in \mathcal{B}$ hermites en $[U, V] = UV - VU = O$.

Bewijs: Zij T normaal. Laat $U = \dfrac{T + T^{\dagger}}{2}$ en $V = \dfrac{T - T^{\dagger}}{2i}$. Dan $T = U + iV$ en U, V hermites en $[U, V] = O$. Voor de omgekeerde bewering gebruiken we dat $T^{\dagger} = U - iV$. $\diamond$

Voor compacte normale operatoren geldt een soortgelijke spectraalstelling als voor hermitese operatoren, behalve dat de eigenwaarden van een normale operator i.h.a. niet reëel zijn:

Stelling 2.23: Zij K een compacte normale operator op een Hilbertruimte H. Dan gelden de beweringen van stelling 2.21(i,iii,iv,v) voor K.

Bewijs: Zij K een compacte normale operator. Dan is volgens Propositie 2.17 en Lemma 2.22 $K = U + iV$ waarbij U, V commuterende compacte zelfgeadjungeerde operatoren zijn. Toepassing van Stelling 2.21 op U geeft dat H een orthogonale directe som is van eigenruimten $H = \oplus_{\lambda} H_{\lambda}$ van U waarbij de som loopt over de eigenwaarden λ van U. Zij nu $w \in H_{\lambda}$, dus $Uw = \lambda w$. Dan is $UVw = VUw = \lambda Vw$, dus V laat H_{λ} invariant: $V(H_{\lambda}) \subset H_{\lambda}$. Omdat H_{λ} een gesloten lineaire deelruimte is van H, is H_{λ} zelf een Hilbertruimte met als inproduct de restrictie van het inproduct op H tot H_{λ}. Dus is de restrictie $V_{\lambda} = V\big|_{H_{\lambda}}$ van V tot H_{λ} een compacte zelfgeadjungeerde operator op H_{λ}. Toepassing van stelling 2.21 op V_{λ} geeft dat $H_{\lambda} = \oplus_{\mu} H_{\lambda,\mu}$ een orthogonale directe som is van eigenruimten $H_{\lambda,\mu}$ van V_{λ} waarbij μ loopt over de eigenwaarden van V. Maar dan is $H = \oplus_{\lambda} \oplus_{\mu} H_{\lambda,\mu}$ de orthogonale directe som van gemeenschappelijke eigenruimten $H_{\lambda,\mu}$ van U en V. Het is niet moeilijk in te zien dat $H_{\lambda,\mu}$ precies de eigenruimte van $K = U + iV$ met eigenwaarde $\lambda + i\mu$ is. $\diamond$

§2.7. Distributies.

We hebben gezien dat volgens de representatiestelling van Riesz een Hilbertruimte H gelijk is aan zijn duaal H^*, d.w.z. als $T \in H^*$, dan is er een $h \in H$ zodanig dat $T(f) = \langle h, f \rangle$. Integraaloperatoren zoals in voorbeeld 3(i) van §2.4 vervullen dus een centrale rol.

Voor de evaluatie-operatoren uit voorbeeld (ii) liggen de zaken anders. Bekijk de operator $E_c(f) = f(c)$ op $H = L_2(\Omega)$ met Ω en interval $[a, b]$ en $c \in [a, b]$. We kunnen formeel noteren $T(f) = \int_\Omega \delta(x-c)f(x)dx$, maar $\delta_c : x \to \delta(x-c)$ is geen element van de Hilbertruimte H. Dit hangt ermee samen dat het domein van de operator niet geheel H is (maar de deelruimte van continue functies). De representatiestelling van Riesz is dus niet toepasbaar. Als we desondanks de operator $T(f)$ in de vorm $\langle \delta_c, f\rangle$ willen uitdrukken, zodat δ_c (met $\delta_c(x) = \delta(x-c)$) een element is van een duale S^* van een vectorruimte S, dan moeten we voor de vectorruimte S een echte deelruimte van H nemen. Wat deze vectorruimte moet zijn, hangt af van de precieze aard van de operator T. Zo krijgen we het concept van een *rigged Hilbert space*: een lineaire deelruimte S van H zodat $S \subset H = H^* \subset S^*$. S is hier een vectorruimte van *testfuncties* en de elementen van S^* heten *distributies.* Een voorbeeld van een ruimte van testfuncties voor het geval dat $\Omega = (-\infty, \infty)$ is de *Schwarzruimte* S, bestaande uit C^∞-functies (oneindig vaak differentieerbaar) ϕ zodanig dat $|\phi|_{m,n} = \sup_{x\in\Omega} |x|^n |\phi^{(m)}(x)|$ eindig is voor alle $m, n \in \mathbf{N}$. Een ander voorbeeld wordt gevormd door de C^∞-functies *met compacte drager* waarvoor geldt dat $f(x) = 0$ voor $|x|$ groot genoeg. Distributies zijn dan continue lineaire operatoren op S, d.w.z. voor $u \in S^*$ geldt dat $u(\phi_k) \to u(\phi)$ als $\phi_k \to \phi$, waarbij $\phi_k \to \phi$ betekent dat $|\phi_k - \phi|_{m,n} \to 0$ voor alle m, n. Zo is δ gedefinieerd als $\langle \delta, \phi\rangle = \delta(\phi) = \phi(0)$ voor $\phi \in S$ een distributie en eveneens $\delta^{(n)}$ gedefinieerd door $\delta^{(n)}(\phi) = (-1)^n \phi^{(n)}(0)$. Formeel noteren we $\int_\mathbf{R} \delta^{(n)}(x-c)\phi(x)dx = (-1)^n \phi^{(n)}(c)$. Gewone (kwadratisch integreerbare) functies kunnen we nu ook als distributies opvatten: $f \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ werkt op een testfunctie ϕ als $\langle f, \phi\rangle = \int_\Omega \overline{f(x)}\phi(x)dx$. Hetzelde geldt ook voor "functies" in $L_2(\Omega)$: laat immers $f \in L_2(\mathbf{R})$. f is op te vatten als de limiet van een Cauchyrij van gewone (kwadratisch integreerbare) functies $\{f_n\}_{n=1}^\infty$. Volgens de ongelijkheid van Schwarz is (voor ϕ een testfunctie): $|\langle f_n - f_m, \phi\rangle|^2 \le \|f_n - f_m\|\|\phi\|$ en dus is ook de rij $\langle f_n, \phi\rangle$ een Cauchyrij in $\mathbf{C}$. De limiet $\langle f, \phi\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f_n, \phi\rangle$ hangt niet af van de precieze keuze van de rij $\{f_n\}_{n=1}^\infty$: als $\{g_n\}$ een andere rij functies is met $\|g_n - f_n\| \to 0$ dan is $\lim_{n\to\infty}\langle f_n - g_n, \phi\rangle = 0$, weer volgens de ongelijkheid van Schwarz. Nu definieert f dus ook weer een distributie. Zo kunnen we L_2-functies opvatten als distributies (de distributies die zelf limiet van een Cauchyrij van distributies in $\mathcal{L}_2$ zijn).

Opmerking: De hierboven beschreven constructie levert een alternatieve methode om functies op $L_2(\Omega)$ te definiëren, zonder van het begrip Lebesgue-integraal gebruik te maken. In feite moet wel nog worden nagegaan dat elke limiet van een Cauchyrij van L_2-functies ook de limiet van een Cauchyrij van $\mathcal{L}_2$-functies is: laat $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ een Cauchyrij zijn van functies $g_n \in L_2$ waarbij g_n zelf de limiet is van een rij $\mathcal{L}_2$-functies $\{g_{nm}\}_{m=1}^\infty$. Nu kan worden aangetoond dat $\{g_{nn}\}_{n=1}^\infty$ een Cauchyrij is die naar g convergeert (m.b.v. een soortgelijke "diagonaalprocedure" als in het bewijs van Prop.2.14). Voor f, g in L_2 die limieten zijn van rijen $\{f_n\}$ resp. $\{g_n\}$ van $\mathcal{L}_2$-functies, is verder het inwendig product gedefinieerd als $\langle f, g\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f_n, g_n\rangle$.

Voor een distributie u kunnen we een *zwakke of distributie-afgeleide* definiëren: laat eerst $g \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R})$ een gewone continu differentieerbare functie zijn en ϕ een testfunctie. Dan is

$$\langle g', \phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g'(x)\phi(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\phi'(x) = -\langle g, \phi'\rangle.$$

We definiëren nu voor een willekeurige distributie v de *distributie-afgeleide* van v als de distributie v' waarvoor geldt dat $\langle v', \phi\rangle = -\langle v, \phi'\rangle$ voor een willekeurige testfunctie ϕ.

Voorbeelden: (we schrijven $\frac{d}{dx}$ voor de zwakke afgeleide):

i. $\frac{d}{dx}|x| = \operatorname{sgn}(x) = 2\theta(x) - 1$.

ii. $\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x)$.

iii. $\frac{d}{dx}\ln|x| = P(1/x)$. De *Cauchy-hoofdwaarde* $P(1/x)$ van $1/x$ is de distributie gedefinieerd door $\langle P(1/x), \phi\rangle = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{\epsilon}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx$ voor $\phi \in S$.

Hierbij is $\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x > 0 \\ 0 & \text{als } x < 0 \end{cases}$ de *Heaviside-functie.* We tonen (ii.) en (iii.) aan. Laat ϕ een testfunctie zijn. Dan is

$$\langle\theta', \phi\rangle = -\langle\theta, \phi'\rangle = -\int_{\mathbf{R}}\theta(x)\phi'(x)dx = -\int_{0}^{\infty}\phi'(x)dx = \phi(0) = \langle\delta, \phi\rangle.$$

Verder is

$$\langle\frac{d}{dx}\ln|x|, \phi\rangle = -\langle\ln|x|, \phi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty}\ln|x|\phi'(x)dx = -\lim_{\epsilon\downarrow 0,\epsilon'\downarrow 0}\left(\int_{\epsilon}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-\epsilon'}\right)\ln|x|\phi'(x)dx =$$

$$= \lim_{\epsilon\downarrow 0,\epsilon'\downarrow 0}\ln(\epsilon)\phi(\epsilon) - \ln(\epsilon')\phi(-\epsilon') + \left(\int_{\epsilon}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-\epsilon'}\right)\frac{\phi(x)}{x}dx.$$

Kies nu $\epsilon = \epsilon'$. Aangezien $\phi(\epsilon) - \phi(-\epsilon) = O(\epsilon)$ voor $\epsilon \to 0$ en $\lim_{\epsilon\downarrow 0}\epsilon\ln\epsilon = 0$, is

$$\langle\frac{d}{dx}\ln|x|, \phi\rangle = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\left(\int_{\epsilon}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-\epsilon}\right)\frac{\phi(x)}{x}dx =: \langle P(1/x), \phi\rangle.$$

De limiet van een rij distributies kan als volgt worden gedefinieerd: laat $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ een rij distributies zijn zodat $\{\langle u_n, \phi\rangle\}$ voor elke testfunctie ϕ een fundamentaalrij is. Dan is de limiet $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ de distributie waarvoor geldt dat $\langle u, \phi\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle u_n, \phi\rangle$. Deze definitie komt in het geval van een convergente rij functies overeen met de limiet van de rij. Een belangrijk voorbeeld is het volgende: laat de rij functies $\{\delta_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$ gegeven zijn door $\delta_n(x) = \begin{cases} n & \text{als } |x| < \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{als } |x| > \frac{1}{2n} \end{cases}$. Laat ϕ een testfunctie zijn. Dan is $\lim_{n\to\infty}\langle\delta_n, \phi\rangle = \phi(0) = \langle\delta, \phi\rangle$. Immers is $\phi(x) = \phi(0) + x\psi(x)$ waarbij ψ continu is en i.h.b. is $|\psi(x)| < M$ als $|x| < 1$ voor zekere M. Dan is

$$\langle\delta_n, \phi\rangle = n\int_{-1/2n}^{1/2n}\phi(x)dx = \phi(0) + n\int_{-1/2n}^{1/2n}x\psi(x)dx$$

en de laatste term gaat naar 0 als $n \to \infty$. De δ-distributie is dus de limiet van de rij functies $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$. Een dergelijke rij heet een deltarij. Een ander voorbeeld van een deltarij is de rij functies $\{f_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin nx}{x}\}_{n=1}^{\infty}$.

Als $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ absoluut integreerbaar is (d.w.z. $\int_{\mathbf{R}}|f(x)|dx$ bestaat en is eindig), dan is de Fourier-getransformeerde $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ van f gedefinieerd als

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ixy}dx. \tag{2.6}$$

Als f continu is op $\mathbf{R}$ dan geldt de omkeerformule

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\hat{f}(y)e^{ixy}dy. \tag{2.7}$$

voor elke x waar f links- en rechtsdifferentieerbaar is. (Strict genomen moet in (2.7) de hoofdwaarde $\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}$ worden genomen. In het geval dat f voldoende glad is en de afgeleiden f', f'' zelf absoluut integreerbaar zijn is $\hat{f}$ zelf absoluut integreerbaar en de integraal in (2.7) convergeert dan. I.h.b. geldt de omkeerformule in het geval dat f een testfunctie is. Laat nu ϕ een testfunctie zijn en f absoluut integreerbaar op $\mathbf{R}$. Dan geldt

$$\langle f,\phi\rangle := \int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(x)}\phi(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(x)}\hat{\phi}(y)e^{ixy}dy\ dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx}\hat{\phi}(y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\hat{f}(y)}\hat{\phi}(y)dy = \frac{1}{2\pi}\langle\hat{f},\hat{\phi}\rangle.$$

Voor een distributie u definiëren we nu de Fouriergetransformeerde $\hat{u}$ door

$$\langle\hat{u},\hat{\phi}\rangle = 2\pi\langle u,\phi\rangle$$

voor een willekeurige testfunctie ϕ.

Voorbeeld. Laat $u(x) = e^{iax}$ voor $a \in \mathbf{R}$. u is niet absoluut integreerbaar en niet kwadratisch integreerbaar maar u is als distributie op te vatten. Voor een testfunctie ϕ is

$$\langle u,\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)e^{-iax}dx = \hat{\phi}(a) = \langle\delta_a,\phi\rangle$$

en dus is $\mathcal{F}(e^{iax}) = 2\pi\delta_a$. Analoog kunnen we eenvoudig aantonen dat $\mathcal{F}(\delta_a)(y) = \dfrac{1}{2\pi}e^{-iay}$.

Op dezelfde wijze kunnen deltafuncties in meer dimensies worden gedefinieerd. We gaan dan uit van de Hilbertruimte $L_2(\mathbf{R}^n)$ en nemen voor de lineaire deelruimte van testfuncties S opnieuw de C^∞-functies met compacte drager, resp. de C^∞-functies zodat alle partiële afgeleiden van orde $O(\|\mathbf{x}\|^{-m})$ zijn (met $m > 0$ willekeurig groot) als $\|\mathbf{x}\| \to \infty$. Een voorbeeld is het volgende: laat Σ een oppervlak in $\mathbf{R}^2$ zijn. Dan is voor $\phi \in S$ een oppervlakte-delta-distributie δ_Σ gedefinieerd als

$$\langle\delta_\Sigma,\phi\rangle = \int_\Sigma \phi(\mathbf{x})dA(\mathbf{x})$$

de oppervlakte-integraal van ϕ over Σ.