I. Gewone lineaire differentiaalvergelijkingen.

In dit hoofdstuk bespreken we een aantal zaken m.b.t. gewone lineaire differentiaalvergelijkingen. Het gaat om vergelijkingen van het type

$$p_N(z)y^{(N)}(z) + \ldots + p_1(z)y'(z) + p_0(z)y(z) = r(z) \tag{1.1}$$

waarbij $r, p_0, \ldots, p_N$ analytische functies op een gebied $\{z \in \mathbf{C} : 0 < |z-\alpha| < R\}$ of continue functies op een interval $[a,b] \in \mathbf{R}$ zijn en waarbij $p_N \neq 0$. De vergelijking (1.1) heet een gewone lineaire N-e orde differentiaalvergelijking (d.v.). Daar de nulpunten van een analytische functie geïsoleerd liggen kunnen we in het eerste (analytische) geval alle termen door p_N delen, m.a.w. we kunnen aannemen dat in (1.1) $p_N \equiv 1$. Als $r \equiv 0$ dan noemen we de d.v. (1.1) *homogeen*, anders *inhomogeen*. Merk op dat de verzameling oplossingen van de homogene d.v. een lineaire structuur heeft: als y_1, y_2 oplossingen zijn van (1.1) met $r = 0$, dan is ook $Ay_1 + By_2$ een oplossing voor $A, B \in \mathbf{C}$. Voor de inhomogene d.v. geldt: als y en $\tilde{y}$ oplossingen zijn dan is $\tilde{y} - y$ een oplossing van de homogene d.v. De algemene oplossing van de inhomogene d.v. is dus de som van de algemene oplossing van de homogene d.v. plus één enkele oplossing (een zgn. *particuliere oplossing*) van de inhomogene d.v. Voorbeelden zullen we verderop zien.

§1.1. Lineaire d.v. van eerste orde.

Beschouw de d.v.

$$y'(x) + P(x)y(x) = R(x)$$

met P, R continu op een reëel interval $[a,b]$ $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$. We bekijken eerst het homogene geval $R(x) \equiv 0$. Dan kunnen we de d.v. direct integreren en de oplossing is

$$y(x) = C \cdot e^{-\int_c^x P(t)dt} =: Cy_0(x)$$

voor $C \in \mathbf{C}$ en $c, x \in [a,b]$ waarbij de integratieconstante $C = y(c)$. Het inhomogene geval kunnen we nu oplossen d.m.v. *variatie van constante(n)*: Neem de oplossing van de homogene vergelijking met i.p.v. de constante C een functie $C(x)$: $y(x) = C(x)y_0(x)$ invullen in de d.v. levert dan:

$$C'(x) = R(x) \cdot e^{+\int_c^x P(t)dt} = \frac{R(x)}{y_0(x)}$$

en opnieuw integreren geeft dan de oplossing

$$y(x) = y_0(x) \cdot \int^x \frac{R(\xi)}{y_0(\xi)} d\xi \quad \text{met} \quad y_0(x) = e^{-\int_c^x P(t)dt}.$$

In de eerste integraal is de ondergrens weggelaten; dit komt overeen met de keuze van een integratieconstante. Een vaste keuze van de ondergrens, bijvoorbeeld x_0, levert een particuliere oplossing. Het geval dat P, R analytische functies op een gebied $G \subset \mathbf{C}$ zijn, gaat in essentie analoog, als we voor G een gebied van de vorm $G = \{z \in \mathbf{C} : |z-\alpha| < \rho\}$ voor $\rho > 0$ of $\rho = \infty$ (dan is $G = \mathbf{C}$) nemen; in dit geval staat $\int^x f(\xi)d\xi$ (net als voor $G = [a,b]$) voor een primitieve van de analytische functie f. Deze is altijd (op een additieve constante na) eenduidig gedefinieerd voor een open cirkelschijf (of voor $G = \mathbf{C}$).

§1.2. Lineaire d.v. met constante coëfficiënten.

We bekijken het geval dat alle coëfficiënten p_k constante functies zijn. In dit geval is er een exacte oplossing te bepalen. We bekijken eerst de homogene d.v.:

$$y^{(N)}(x) + p_{N-1}y^{(N-1)}(x) + \ldots + p_1 y'(x) + p_0 y(x) = 0.$$

De oplossing heeft de structuur van een N-dimensionale vectorruimte (met als optelling de gewone optelling van functies) en een basis krijgen we als volgt: Beschouw het *karakteristiek polynoom* van de d.v.: $\chi(X) = X^N + p_{N-1}X^{N-1} + \ldots + p_1 X + p_0$. Dit heeft N complexe nulpunten met multipliciteit geteld: laat $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ de verschillende nulpunten van χ met multipliciteiten respectievelijk $k_1, \ldots, k_m$. Dan vormen de N functies $y_{ij}(x) = e^{\alpha_i x}x^{j-1}$ met $i = 1, \ldots, m$ en $j = 1, \ldots, k_i$ een basis van de vectorruimte van oplossingen.

Voorbeelden. 1. $y'' - 4y = 0$. Het karakteristiek polynoom $X^2 - 4$ heeft nulpunten 2 en -2. De oplossing is $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$.
2. $y'' + 2y' + y = 0$. Het karakteristiek polynoom $X^2 + 2X + 1$ heeft een nulpunt -1 met multipliciteit 2. De oplossing is $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$.
3. $y'' + 2y' + 5y = 0$. Het karakteristiek polynoom $X^2 + 2X + 5$ heeft nulpunten $-1 + 2i, -1 - 2i$. De oplossing is $y(x) = e^{-x}(c_1 e^{-2ix} + c_2 e^{2ix})$. Dit kunnen we, met $e^{iax} = \cos ax + i \sin ax$, ook schrijven als $y(x) = e^{-x}(d_1 \cos 2x + d_2 \sin 2x)$. De tweede schrijfwijze heeft het voordeel dat de coëfficiënten d_1, d_2 reëel zijn als de oplossing $y(x)$ reëelwaardig is.

Als de oplossing van de homogene vergelijking bekend is, is een particuliere oplossing van de inhomogene in principe d.m.v. integratie (of *kwadratuur*) te vinden. Simpeler is echter soms de *methode van de aanverwante functie:*

Voorbeeld: $y'' - 2y' + y = \sin 2x$. Omdat afgeleiden van $\sin 2x$ en $\cos 2x$ opnieuw (lineaire combinaties van) $\sin 2x$ en $\cos 2x$ opleveren, proberen we voor een particuliere oplossing een functie van de vorm $A \sin 2x + B \cos 2x$. Invullen in de d.v. levert:

$$(-3A + 4B) \sin 2x + (-3B - 4A) \cos 2x = \sin 2x.$$

Vergelijken van de coëfficiënten geeft $-3A + 4B = 1, -3B - 4A = 0$ dus de algemene oplossing van de d.v. is

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{4}{25} \cos 2x - \frac{3}{25} \sin 2x.$$

De methode van de aanverwante functie werkt alleen als er een geschikte aanverwante functie te bedenken is. Een algemenere methode, die ook voor lineaire d.v. met niet-constante coëfficiënten werkt, is de methode van *variatie van constanten.* We zullen deze toelichten aan de hand van een voorbeeld:

$y'' - y = \sin 2x$. Bepaal eerst de oplossing van de homogene vergelijking: $y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ met c_1, c_2 constanten. We vatten nu de constanten als functies van x op en vullen het resultaat in in de d.v. Daar de nulde-afgeleidetermen wegvallen levert dit een vergelijking in c_1', c_2', c_1'', c_2''. Om c_1, c_2 hieruit te vinden hebben we nog een tweede vergelijking nodig; het handigste is te nemen: $c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{-x} = 0$. Dan komen de tweede afgeleiden van c_1, c_2 niet meer voor in de vergelijkingen, die dus luiden:

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{-x} = 0, \qquad c_1'(x)e^x - c_2'(x)e^{-x} = \sin 2x.$$

Oplossen geeft:

$$c_1'(x) = \frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x, \qquad c_2'(x) = -\frac{1}{2}e^{x}\sin 2x.$$

Primitiveren geeft dan

$$c_1(x) = e^{-x}\left(-\frac{1}{10}\sin 2x - \frac{1}{5}\cos 2x\right) + d_1, \qquad c_2(x) = e^{x}\left(-\frac{1}{10}\sin 2x + \frac{1}{5}\cos 2x\right) + d_2$$

met d_1, d_2 constanten. Nu is de algemene oplossing van de inhomogene d.v. te vinden door de gevonden waarden in $y = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x}$ te substitueren. We vinden als oplossing

$$y(x) = d_1e^x + d_2e^{-x} - \frac{1}{5}\sin 2x.$$

§1.3. De Wronskiaan.

We beschouwen de homogene N-de orde d.v.

$$y^{(N)}(z) + \ldots + p_1(z)y'(z) + p_0(z)y(z) = 0 \tag{1.2}$$

met p_k analytische functies in een gebied $G \subset \mathbf{C}$ of continue functies op een interval $[a,b] \in \mathbf{R}$. Zoals in §1 beargumenteerd, vormt de oplossingsverzameling, mits niet-leeg, een vectorruimte t.a.v. de optelling (en scalaire vermenigvuldiging) van functies. In deze paragraaf tonen we aan dat de dimensie van deze oplossingsruimte nooit groter kan zijn dan N. Hiervoor gebruiken we de determinant van Wronski (oftewel de Wronskiaan):

Definitie: Laat $y_1, \ldots, y_n$ een stelsel analytische functies op een gebied $G \subset \mathbf{C}$ zijn, resp. een stelsel van $n-1$ keer (reëel) differentieerbare functies op een interval $G = [a,b] \subset \mathbf{R}$. De *Wronskiaan* van $y_1, \ldots, y_n$ is de determinant

$$W(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{vmatrix}.$$

De Wronskiaan is een functie van z voor $z \in G$. De Wronskiaan is een maat voor lineaire onafhankelijkheid van een stelsel functies:

Het stelsel $y_1, \ldots, y_n$ is op G lineair afhankelijk $\Rightarrow$ er zijn $c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{C}$, niet alle 0, zodat

$$c_1y_1(z) + \ldots + c_ny_n(z) = 0 \qquad \text{voor alle } z \in G$$

$\Rightarrow$ voor $(c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$ is

$$\begin{cases} c_1y_1(z) + \ldots + c_ny_n(z) = 0 \\ c_1y_1'(z) + \ldots + c_ny_n'(z) = 0 \\ \vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(z) + \ldots + c_ny_n^{(n-1)}(z) = 0 \end{cases} \qquad (z \in G).$$

$\Rightarrow$

$$W(y_1,\ldots,y_n)(z) = 0 \text{ voor } z \in G.$$

Als $W(y_1,\ldots,y_n) \neq 0$ dan zijn de functies $y_1,\ldots,y_n$ dus lineair onafhankelijk. Omgekeerd geldt: als $W(y_1,\ldots,y_n)(z) = 0$ en $y_1,\ldots,y_n$ zijn analytisch, dan zijn $y_1,\ldots,y_n$ afhankelijk.

Beschouw de d.v. (1.2) met p_k analytisch op een gebied $G \subset \mathbf{C}$ resp. continu op $G = [a,b] \subset \mathbf{R}$. Laat $y_1,\ldots,y_N$ oplossingen van de d.v. in een omgeving U van $z_0 \in G$ en

$$W(y_1,\ldots,y_N)'(x) = \begin{vmatrix} y_1^{(N)} & \ldots & y_n^{(N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1' & \ldots & y_N' \\ y_1 & \ldots & y_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -p_{N-1}y_1^{(N-1)} - \ldots & \ldots & -p_{N-1}y_N^{(N-1)} - \ldots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1' & \ldots & y_N' \\ y_1 & \ldots & y_N \end{vmatrix} =$$

$$= -p_{N-1}(x) \cdot \begin{vmatrix} y_1^{(N-1)} & \ldots & y_N^{(N-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1' & \ldots & y_N' \\ y_1 & \ldots & y_N \end{vmatrix} = -p_{N-1}(x)W(y_1,\ldots,y_N)(x)$$

waarbij we in de bovenste regel (1.2) hebben gebruikt. Maar dan geldt dat

$$W(y_1,\ldots,y_N)(z) = W(y_1,\ldots,y_N)(z_0) \cdot \exp\left(-\int_{z_0}^{z} p_{N-1}(t)dt\right).$$

Gevolg: neem $z_0 \in G$ vast. Dan is $W(y_1,\ldots,y_N)(z) = 0$ voor zekere $z \in G$ dan en slechts dan als $W(y_1,\ldots,y_N)(z_0) = 0$.

Nu kunnen we bewijzen dat een homogene lineaire N-de orde d.v. met analytische coëfficiënten niet meer dan N lineair onafhankelijke oplossingen heeft:

Propositie 1.1: Beschouw de d.v. (1.2) met p_k analytisch op een gebied $G \subset \mathbf{C}$. Laat $y_1,\ldots,y_{N+1}$ oplossingen van de d.v. in een omgeving U van $z_0 \in G$. Dan zijn er constanten $c_1,\ldots,c_{N+1}$, niet alle nul, zodat $c_1y_1(z) + \ldots + c_Ny_N(z) + c_{N+1}y_{N+1}(z) = 0$ voor $z \in U$.

Bewijs: Omdat

$$y_k^{(N)}(z) = -p_{N-1}(z)y_k^{(N-1)}(z) - \ldots - p_0(z)y_k(z)$$

voor $k = 1,\ldots,N+1$ en $z \in U$ is $W(y_1,\ldots,y_{N+1})(z) = 0$ voor $z \in U$, en dus zijn $y_1,\ldots,y_{N+1}$ lineair afhankelijk op U.

Opmerking: Propositie 1.1 gaat ook op in het geval dat $G = (a,b) \subset \mathbf{R}$ een interval is en $p_0,\ldots,p_{N-1}$ continu zijn op G. Voor elke $c \in G$ en $a_0,\ldots,a_{N-1} \in \mathbf{R}$ is er een $\epsilon > 0$ zodat de d.v. (1.2) op $(c-\epsilon, c+\epsilon)$ precies één oplossing $y(x)$ heeft met $y^{(j)}(c) = a_j$ voor $j = 0,\ldots,N-1$. In het geval dat $N = 2$ en y,z twee oplossingen van (1.2) met $y(c) = z(c) \neq 0$ en $y'(c) = z'(c)$ volgt, als in het bewijs van Propositie 1.1, dat $W(y,z)(x) = y'(x)z(x) - z'(x)y(x) = 0$ voor x in een open omgeving U van c, waaruit volgt dat $y = \lambda z$ voor zekere $\lambda \in \mathbf{R}$.

We laten nu zien hoe de oplossing van een inhomogene lineaire d.v. kan worden gevonden als de oplossing van de homogene d.v. bekend is. Beschouw daartoe de d.v.

$$y^{(N)}(z) + p_{N-1}(z)y^{(N-1)}(z) + \ldots + p_1(z)y'(z) + p_0(z)y(z) = f(z) \tag{1.3}$$

waarbij $p_0, \ldots, p_{N-1}, f$ continue functies op een interval $[a,b] \subset \mathbf{R}$ zijn of op een gebied $G \subset \mathbf{C}$. Laat $y_1, \ldots, y_N$ een basis van oplossingen van de homogene d.v. (met $f = 0$) zijn. We passen de methode van variatie van constanten toe: laat $y(z) = C_1(z)y_1(z) + \ldots + C_N(z)y_N(z)$ een oplossing van (1.3) zijn voor geschikte functies $C_1, \ldots, C_N$. We leggen, als in §1.2, op $C_1, \ldots, C_N$ de eis dat

$$C_1'(z)y_1^{(k)}(z) + \ldots + C_N'(z)y_N^{(k)}(z) = 0, \qquad (k = 0, 1, \ldots, N-2). \tag{1.4}$$

Dan is, voor $k = 0, \ldots, N-1$,

$$y^{(k)}(z) = C_1(z)y_1^{(k)}(z) + \ldots + C_N(z)y_N^{(k)}(z)$$

en

$$y^{(N)}(z) = C_1(z)y_1^{(N)}(z) + \ldots + C_N(z)y_N^{(N)}(z) + C_1'(z)y_1^{(N-1)}(z) + \ldots + C_N'(z)y_N^{(N-1)}(z),$$

zodat

$$C_1'(z)y_1^{(N-1)}(z) + \ldots + C_N'(z)y_N^{(N-1)}(z) = f(z). \tag{1.5}$$

Samen met (1.4) geeft dit N vergelijkingen met N onbekenden voor $C_1', \ldots, C_N'$. M.b.v. de regel van Cramer kunnen we de oplossingen schrijven als

$$C_j'(z) = (-1)^{j-1} \frac{f(z)W(y_1, \ldots, \hat{y}_j, \ldots, y_N)(z)}{W(y_1, \ldots, y_N)(z)} \qquad (j = 1, \ldots, N)$$

waarbij een dakje boven een functie betekeent dat deze wordt weggelaten. Door integratie van $C_j'(z)$ kan de oplossing zo worden uitgedrukt in termen van $y_1, \ldots, y_N, f$ en N integratieconstanten.

§1.4. Machtreeksoplossingen; de methode van Frobenius.

Beschouw opnieuw de d.v. (1.2). We beperken ons verder tot het geval dat de coëfficiënten analytische functies op een gebied $G \subset \mathbf{C}$ zijn. Dat in dit geval de oplossingsruimte altijd dimensie N heeft volgt uit de volgende stelling:

Stelling 1.2: Laat $p_1, \ldots p_N$ analytische functies op het gebied $G = \{z \in \mathbf{C} : |z - \alpha| < R\}$ zijn. Dan heeft de d.v. (1.2) N op G lineair onafhankelijke analytische oplossingen.

Opmerking: een oplossing $y(z)$ kan worden verkregen door de N waarden $y(\alpha)$,$y'(\alpha)$, $\ldots, y^{(N-1)}(\alpha)$ voor te schrijven. Uit (1.2) volgt dan $y^{(N)}(\alpha)$, en door herhaald differentiëren berekenen we vervolgens de hogere afgeleiden $y^{(k)}(\alpha)$ $(k > N)$. De oplossing is dan gegeven door $y(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n$. De enige moeilijkheid is gelegen in het aantonen dat deze machtreeks convergeert voor $|z - \alpha| < R$.

We kunnen nu de oplossingen van (1.2) proberen te bepalen door de coëfficiënten $p_k(z)$ als machtreeksen rond $\alpha \in \mathbf{C}$ te schrijven en voor $y(z)$ een machtreeks $y(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ in (1.2) in te vullen: in het geval dat $N = 2$ zullen we zo laten zien dat we, als we de eerste twee coëfficiënten $a_0 = y(\alpha)$ en $a_1 = y'(\alpha)$ kiezen, althans in principe alle coëfficiënten a_n van de machtreeks kunnen bepalen. Voor het gemak kiezen we $\alpha = 0$. Beschouw dus de d.v.

$$y''(z) + P(z)y'(z) + Q(z)y(z) = 0 \tag{1.6}$$

met $P(z) = p_0 + p_1 z + \ldots,\ Q(z) = q_0 + q_1 z + \ldots$. Invullen van $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ geeft:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+1)(n+2)z^n + \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n + \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0.$$

In het linkerlid staat een machtreeks die identiek gelijk is aan nul. De coëfficiënten van alle machten z^n zijn dus nul: voor $n = 0$ krijgen we zo

$$2a_2 + p_0 a_1 + q_0 a_0 = 0,$$

voor $n = 1$

$$6a_3 + 2p_0 a_2 + p_1 a_1 + q_0 a_1 + q_1 a_0 = 0$$

en in het algemene geval

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = \text{een uitdrukking in } a_0, \ldots, a_{n+1}, p_0, q_0, \ldots p_n, q_n.$$

Omdat $(n+1)(n+2)$ nooit nul wordt, ligt a_n voor alle $n \geq 2$ uniek vast.

Toepassing: de d.v. van Legendre. Beschouw de *differentiaalvergelijking van Legendre*

$$(1 - z^2)y''(z) - 2zy'(z) + \lambda y(z) = 0 \tag{1.7}$$

waarbij $\lambda \in \mathbf{C}$ een constante is. Door te delen door $1 - z^2$ krijgen we een vergelijking in de vorm (1.2) met op $G = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ analytische coëfficiënten. Volgens stelling 1.2 zijn er dus twee lineair onafhankelijke, op G analytische oplossingen. We kunnen twee van zulke oplossingen $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ krijgen door achtereenvolgens $a_0 = 1, a_1 = 0$ en $a_0 = 0, a_1 = 1$ te nemen. Als we de machtreeks voor $y(z)$ in (1.7) invullen vinden we de vergelijkingen

$$(1 - z^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2} - 2z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0.$$

Als we de termen samennemen wordt de coëfficiënt van z^n:

$$a_{n+2}(n+1)(n+2) - a_n n(n+1) + \lambda a_n = 0.$$

Zo krijgen we de recurrente relatie:

$$a_{n+2} = a_n \cdot \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)}. \tag{1.8}$$

Voor sommige waarden van λ is er een polynoomoplossing: als $\lambda = N(N+1)$ voor $N = 0, 1, \ldots$ is $a_{N+2} = 0$ en dus ook $a_{N+4} = a_{N+6} = \ldots = 0$. Als we nu voor N even $a_1 = 0$ kiezen en voor N oneven $a_0 = 0$ dan is ook $a_{N+1} = a_{N+3} = \ldots = 0$ en $y(z)$ wordt dan een polynoom van graad N. Deze polynoomoplossingen heten de *Legendrepolynomen*. Preciezer: het N-e Legendrepolynoom P_N is de polynoomoplossing van vergelijking (1.7) met $\lambda = N(N+1)$ waarbij P_N zo genormeerd is dat $P_N(1) = 1$. Uit (1.8) zien we, m.b.v. de verhoudingstest van d'Alembert, dat de niet-polynoomoplossingen van de Legendrevergelijking inderdaad (in overeenstemming met Stelling 1.2) convergentiestraal 1 hebben.

Opmerking: (reductie van de orde) Als van een homogene lineaire N-e orde d.v. een oplossing bekend is kunnen we de het oplossen van de d.v. reduceren tot het oplossen van een d.v. van orde $N-1$. We zullen de methode toelichten voor het geval $N = 2$. Neem aan dat y_0 een oplossing is van de d.v. (1.6) op G waarbij G een gebied van de vorm $G = \{z \in \mathbf{C} : |z-\alpha| < R\}$ in $\mathbf{C}$ is en P, Q analytisch op G ofwel $G = [a,b]$ een interval in $\mathbf{R}$ is en P, Q continu op G. Schrijf de oplossing als $y(z) = C(z)y_0(z)$ met C een onbekende functie. Invullen in de d.v. (1.6) geeft een homogene eerste-orde d.v. voor C':

$$y_0(z)C''(z) + (2y_0'(z) + P(z)y_0(z))C'(z) = 0$$

en dus is

$$C'(z) = \frac{1}{y_0^2(z)} \cdot e^{-\int^z P(t)dt},$$

waarbij $\int^z P(t)dt$ een primitieve van $P(z)$ is. Primitiveren van C' levert de algemene oplossing $y(z) = C(z)y_0(z)$ van (1.8). Merk op dat de oplossing twee integratieconstanten bevat.

§1.5. Singuliere punten.

We bekijken de homogene d.v.

$$y^{(N)}(z) + p_{N-1}(z)y^{(N-1)}(z) + \ldots + p_1(z)y'(z) + p_0(z)y(z) = 0 \tag{1.9}$$

waarbij $p_0, \ldots, p_{N-1}$ analytische functies op $G = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z-\alpha| < R\}$ zijn (voor $R > 0$). Als $p_0, \ldots, p_{N-1}$ analytisch in $z = \alpha$ zijn (d.w.z. in een machtreeks rond $z = \alpha$ te ontwikkelen zijn), dan heet $z = \alpha$ een *gewoon punt* van de d.v. Dit geval hebben we in de vorige paragraaf bestudeerd. (1.9) heeft dan N lineair onafhankelijke machtreeksoplossingen met convergentiestraal R rond α. Als minstens een van de coëfficiënten $p_k(z)$ niet analytisch is in $z = \alpha$, dan heet $z = \alpha$ een *singulier punt* van de d.v. We onderscheiden dan twee gevallen:
1. $z = \alpha$ is geen gewoon punt en voor $k = 0, \ldots, N-1$ geldt: p_k is analytisch in $z = \alpha$ of heeft in $z = \alpha$ een pool van orde hoogstens $N-k$, m.a.w. $\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)^{N-k}p_k(z)$ bestaat voor $k = 0, \ldots, N-1$. Dan heet $z = \alpha$ een *regulier singulier punt.*
2. Als $z = \alpha$ noch een gewoon punt noch een regulier singulier punt van de d.v. is, dan noemen we $z = \alpha$ een *irregulier singulier punt.*

Voorbeelden:

1. $z = 1$ en $z = -1$ zijn reguliere singuliere punten van de d.v. van Legendre (1.7); de andere punten in $\mathbf{C}$ zijn gewone punten. Immers $P(z) = \dfrac{-2z}{1-z^2}$ en $Q(z) = \dfrac{\lambda}{1-z^2}$ (voor $\lambda \neq 0$) hebben in $z = \pm 1$ een pool van orde 1.
2. De d.v. *van Euler-type*

$$z^N y^{(N)}(z) + a_{N-1}z^{N-1}y^{(N-1)}(z) + \ldots + a_1 z y'(z) + a_0 y(z) = 0 \tag{1.10}$$

waarbij $a_0, \ldots, a_{N-1} \in \mathbf{C}$, heeft een regulier singulier punt in $z = 0$; de andere punten in $\mathbf{C}$ zijn gewone punten.

Het geval $z = \infty$: Functies die analytisch zijn voor $|z| > R$ zijn in een *Laurentreeks* rond $z = \infty$ te ontwikkelen: $f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ met $m = -\infty$ of $m \in \mathbf{Z}$. Als $m \geq 0$ dan zeggen we dat f analytisch is in $z = \infty$; in dit geval bestaat $\lim_{z\to\infty} f(z)$. Als $a_m \neq 0$ en $m < 0$ dan heeft f een pool van orde $|m|$ in ∞ (merk op dat de reeks dan geen machtreeks in $1/z$ meer is; een "machtreeks" met negatieve machten van $z - \alpha$ resp. $1/z$ noemen we een Laurentreeks). Als nu de coëfficiënten $p_0, \ldots, p_{N-1}$ van (1.9) analytisch zijn voor $|z| > R$ voor zekere $R \geq 0$, dan substitueren we in (1.9) $t = 1/z$. We krijgen dan een d.v. in $w(t) = y(1/t)$ met coëfficiënten die analytisch zijn voor $0 < |t| < 1/R$. We noemen $z = \infty$ een gewoon (resp. regulier, resp. irregulier singulier) punt van de oorspronkelijke d.v. (1.9) als $t = 0$ een gewoon (resp. regulier, resp. irregulier singulier) punt van de getransformeerde d.v. is.
Voor tweede-orde d.v. vatten we het resultaat samen:

Propositie 1.3: Beschouw de d.v.

$$y''(z) + P(z)y'(z) + Q(z)y(z) = 0 \tag{1.11}$$

met P, Q analytisch voor $|z| > R$. Het punt $z = \infty$ is een gewoon punt van de d.v. als

$$\lim_{z\to\infty} (2z - z^2 P(z)) \text{ en } \lim_{z\to\infty} z^4 Q(z) \text{ bestaan.}$$

$z = \infty$ is een regulier singulier punt als het geen gewoon punt is en

$$\lim_{z\to\infty} zP(z) \text{ en } \lim_{z\to\infty} z^2 Q(z) \text{ bestaan.}$$

Bewijs: Laat $t = 1/z$ en $w(t) = y(z) = y(1/t)$. Voor $0 < |t| < 1/R$ geldt dan

$$y'(z) = -t^2 w'(t), \qquad y''(z) = 2t^3 w'(t) + t^4 w''(t),$$

en de getransformeerde d.v. wordt

$$t^4 w''(t) + (2t^3 - t^2 P(1/t))w'(t) + Q(1/t)w(t) = 0.$$

Pas nu de definities toe.

Voorbeelden: 1. $z = \infty$ is een regulier singulier punt van de Legendrevergelijking als $\lambda \neq 0$ en een gewoon punt als $\lambda = 0$.
2. $z = \infty$ is een regulier singulier punt van de Eulervergelijking (1.10) voor $N = 2$ (in feite voor alle $N > 0$ behalve als $N = 1$ en $a_0 = 0$ - in dit geval is het een gewoon punt).

Neem nu aan dat $z = z_0$ een singulier punt is van de d.v. Zonder beperking der algemeenheid kunnen we aannemen dat $z_0 = 0$. Er bestaat een gepunkteerde open omgeving $U = \{0 < |z| < r\}$ van $z = 0$ zodanig dat de d.v. (1.11) geen singuliere punten heeft in U. Laat $z' \in U$. In een omgeving van z' heeft (1.11) een basis van analytische oplossingen $y_1(z), y_2(z)$. Als we nu in een cirkel met middelpunt 0 rondlopen, dan vormt de analytische voortzetting van de oplossingen opnieuw een basis van oplossingen van de d.v. (1.11), m.a.w. er zijn constanten A, B, C, D zodanig dat

$$y_1(ze^{2\pi i}) = Ay_1(z) + By_2(z), \quad y_2(ze^{2\pi i}) = Cy_1(z) + Dy_2(z),$$

waarbij de *omloopsmatrix* $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ inverteerbaar is. Indien we een andere basis van oplossingen kiezen gaat de omloopsmatrix over in een gelijkvormige matrix. Er bestaat een basis $\{w_1(z), w_2(z)\}$ zodanig dat de matrix in Jordan-normaalvorm komt te staan. Er zijn twee mogelijkheden:

a. De matrix is diagonaal: dan zijn er $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$
zodanig dat

$$w_1(ze^{2\pi i}) = \lambda_1 w_1(z), \quad w_2(ze^{2\pi i}) = \lambda_2 w_2(z).$$

Laat $e^{2\pi\alpha i} = \lambda_1,\ e^{2\pi\beta i} = \lambda_2$ en $v_1(z) = w_1(z)z^{-\alpha}, v_2(z) = w_2(z)z^{-\beta}$. Nu is $v_j(ze^{2\pi i}) = v_j(z)$ voor $j = 1, 2$, m.a.w. v_1, v_2 zijn enkelwaardige analytische functies voor $|z| < r$ en rond $z = 0$ in een Laurentreeks te ontwikkelen. Er bestaat dus een basis van oplossingen van de vorm

$$w_1(z) = z^{\alpha} v_1(z),\ w_2(z) = z^{\beta} v_2(z) \tag{1.12}$$

waarbij v_1, v_2 analytisch zijn voor $0 < |z| < r$. Als $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (dus $\alpha - \beta \notin \mathbf{Z}$), dan heet $\{w_1, w_2\}$ een *kanonieke basis* van oplossingen.

b. De matrix is van de vorm $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ met $\lambda \neq 0$. Dan is

$$w_1(ze^{2\pi i}) = \lambda w_1(z) + w_2(z), \quad w_2(ze^{2\pi i}) = \lambda w_2(z).$$

Als in geval (a) is $w_2(z) = z^{\alpha} v_2(z)$ waarbij $e^{2\pi i\alpha} = \lambda$ en $v_2(z)$ analytisch voor $0 < |z| < r$. Verder is

$$\frac{w_1(ze^{2\pi i})}{w_2(ze^{2\pi i})} = \frac{w_1(z)}{w_2(z)} + \frac{1}{\lambda}.$$

Aangezien $\log(ze^{2\pi i}) = \log z + 2\pi i$, is $v_1(z) := \dfrac{w_1(z)}{w_2(z)} - \dfrac{1}{2\pi i\lambda} \log z$ een enkelwaardige analytische functie voor $0 < |z| < r$ (dus te ontwikkelen in en Laurentreeks rond $z = 0$). Er bestaat dus een basis van oplossingen van de vorm

$$w_2(z) = z^{\alpha} v_2(z), \quad w_1(z) = w_2(z) \log z + v_1(z) \tag{1.13}$$

met v_1, v_2 analytische functies voor $0 < |z| < r$. (In (1.13) is de functie w_1 met een factor $2\pi i\lambda$ herschaald.)

Als het singuliere punt z_0 een regulier singulier punt is, dan zijn de functies v_1, v_2 meromorf; door eventueel $\alpha - n, \beta - n$ i.p.v. α, β te kiezen kunnen we er voor zorgen dat v_1, v_2 zelfs analytisch zijn - merk op dat immers α, β op een geheel getal na vastliggen). Voor oplossingen rond reguliere singuliere punten bestaat er de volgende variant op Stelling 1.2:

Stelling 1.4: *(Fuchs)* Beschouw de d.v. (1.9) met $z = \alpha$ (resp. $z = \infty$) een regulier singulier punt zodat de coëfficiënten $p_0, \ldots, p_{N-1}$ analytisch zijn in in $G = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z - \alpha| < R\}$ (resp. $G = \{z \in \mathbf{C} : |z| > R\}$). Dan heeft de d.v. er een oplossing $y(z) = (z - \alpha)^{\rho} f(z)$ (resp. $y(z) = z^{\rho} f(z)$) waarbij f een analytische functie is op G en $\lim_{z\to\alpha} f(z) = L$, resp. $\lim_{z\to\infty} f(z) = L$ voor $L \neq 0$.

Merk op dat Stelling 1.4 niet zegt dat er een basis is van oplossingen van de vorm $(z-\alpha)^{\rho} f(z)$. Het bepalen van de oplossing gaat in essentie analoog aan het geval dat α een gewoon punt is. We geven een paar voorbeelden.

Voorbeelden: 1. Beschouw de *Legendrevergelijking*

$$(1 - z^2)y''(z) - 2zy'(z) + \lambda y(z) = 0.$$

Zoals we gezien hebben zijn $z = 1$ en $z = -1$ reguliere singuliere punten. We bepalen oplossingen rond $z = 1$: met de substitutie $w = z - 1$ en $y(z) = u(w)$ wordt de d.v. getransformeerd in:

$$w(w+2)u''(w) + 2(w+1)u'(w) - \lambda u(w) = 0.$$

Volgens Stelling 1.4 is er een oplossing van de vorm $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^{n+\rho}$ met $a_0 \neq 0$; invullen in de d.v. levert

$$w(w+2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\rho)(n+\rho-1)w^{n+\rho-2} + 2(w+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\rho)w^{n+\rho-1} - \lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^{n+\rho} = 0.$$

De coëfficiënt van $w^{n+\rho}$ is dan

$$2a_{n+1}(n+\rho+1)^2 + a_n\big((n+\rho)(n+\rho+1) - \lambda\big) = 0.$$

Daar $a_0 \neq 0$ en $a_n = 0$ voor $n < 0$ vinden we de indices ρ uit de *indiciaalvergelijking*: dit is de vergelijking van de coëfficiënt van $w^{\rho-1}$: $2a_0\rho^2 = 0$ en $a_0 \neq 0$ levert $\rho = 0$. Voor de coëfficiënten a_n geldt dan:

$$a_{n+1} = -a_n \cdot \frac{n(n+1) - \lambda}{2(n+1)^2} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Voor $\lambda = N(N+1)$ met $N \in \mathbf{Z}$ is $a_n = 0$ voor $n > N$; de oplossing is dus een polynoom. Uiteraard is dit - als we $a_0 = 1$ kiezen - precies het N-e Legendrepolynoom P_N. Voor de andere waarden van N krijgen we een oplossing die analytisch is voor $|w| = |z-1| < 2$. De oplossingen die lineair onafhankelijk zijn van de gevonden oplossing, zijn dus niet als een machtreeks (maal z^ρ) te schrijven. Een analoge situatie vinden we voor $z = -1$.

2. De *Eulervergelijking* $z^2y''(z) + pzy'(z) + qy(z) = 0$. $z = 0$ is een regulier singulier punt als p, q niet beide nul zijn. We zoeken een oplossing $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\rho}$. Invullen in de d.v. levert

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\rho)(n+\rho-1)z^{n+\rho} + \sum_{n=0}^{\infty} pa_n(n+\rho)z^{n+\rho} + \sum_{n=0}^{\infty} qa_n z^{n+\rho} = 0.$$

De coëfficiënt van $z^{n+\rho}$ is

$$a_n\big((n+\rho)(n+\rho-1) + p(n+\rho) + q\big) = 0.$$

Voor $n = 0$ krijgen we de indiciaalvergelijking (immers $a_0 \neq 0$):

$$\rho(\rho-1) + p\rho + q = 0.$$

Tenzij $(p-1)^2 = 4q$ vinden we twee verschillende waarden van $\rho \in \mathbf{C}$; aan de andere vergelijkingen is voldaan als we $a_n = 0$ voor $n > 0$ kiezen; er zijn dus twee lineair onafhankelijke oplossingen van de vorm $y(z) = z^\rho$ met ρ een oplossing van de indiciaalvergelijking. In het geval dat $(p-1)^2 = 4q$ en dus beide oplossingen van de indiciaalvergelijking samenvallen kunnen we de methode van §1.4 (reductie van de orde) gebruiken om een tweede lineair onafhankelijke oplossing te vinden; zo'n oplossing is $z^\rho \log z$ (zie opgave *). De Eulervergelijking kan overigens ook worden opgelost door $z = e^w$ te substitueren: dit levert een d.v. met constante coëfficiënten en deze kunnen we oplossen m.b.v. de theorie van §1.3. (verg. opgave *).

3. De *Besselvergelijking* $z^2y''(z) + zy'(z) + (z^2 - \nu^2)y(z) = 0$. $z = 0$ is een regulier singulier punt. We substitueren een oplossing van de vorm $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\rho}$. Invullen geeft voor de coëfficiënt van $z^{n+\rho}$:

$$a_n\big((n+\rho)^2 - \nu^2\big) + a_{n-2} = 0.$$

De indiciaalvergelijking is dan: $\rho^2 - \nu^2 = 0$ dus de indices zijn $\rho = \nu$ en $\rho = -\nu$. Verder is dan

$$n(n+2\rho)a_n = -a_{n-2} \qquad (n \geq 1).$$

Daar $a_n = 0$ voor $n < 0$ kunnen we $a_n = 0$ voor n oneven nemen; voor $n = 2m$ even en $\rho \neq 0, -1, -2, \ldots$ is dan

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!4^m(m+\rho)\cdot\ldots\cdot(1+\rho)} \cdot a_0.$$

Als we nu voor $a_0 = \dfrac{1}{2^\rho\Gamma(\rho+1)}$ kiezen dan krijgen we de *Besselfunctie* van orde ρ:

$$J_\rho(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\rho+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\rho}.$$

Voor $\nu \notin \mathbf{Z}$ vinden we zo twee lineair onafhankelijke oplossingen J_ν en $J_{-\nu}$. Als $\nu \in \mathbf{Z}$, dan vinden we een oplossing $J_{|\nu|}$. Voor $\rho = -|\nu|$ worden de termen met $m < |\nu|$ nul daar $1/\Gamma(n) = 0$ voor $n \in \mathbf{Z}, n \leq 0$. In feite is $J_{-|\nu|}(z) = (-1)^{|\nu|}J_{|\nu|}(z)$. In dit geval kunnen we geen tweede lineair onafhankelijke oplossing vinden van de vorm $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\rho}$. M.b.v. reductie van de orde vinden we als tweede oplossing de *Neumannfunctie* van orde $N = |\nu|$:

$$Y_N(z) = \frac{2}{\pi} \cdot J_N(z) \log z + z^{-N} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{2n}$$

voor zekere coëfficiënten $b_n \in \mathbf{R}$. Y_N is ook gedefinieerd als

$$Y_N(z) = \lim_{\mu \to N} \frac{\cos \mu\pi J_\mu(z) - J_{-\mu}(z)}{\sin \mu z}.$$

Opmerking: In het algemeen kunnen we zeggen: als $z = \alpha$ een regulier singulier punt is van de d.v.

$$y''(z) + P(z)y'(z) + Q(z)y(z) = 0$$

dan zijn er twee lineair onafhankelijke oplossingen van de vorm $(z-\alpha)^\rho \cdot f(z)$ met f analytisch in α als voor de twee wortels ρ_1, ρ_2 van de indiciaalvergelijking geldt dat
$\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbf{Z}$. Als $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbf{Z}$ dan is er minstens een zo'n oplossing. In het geval van de Besselvergelijking zien we dat er maar één "machtreeks"oplossing is precies indien
$\rho_1 - \rho_2 \in 2\mathbf{Z}$.

4. Tot slot volgt hier nog een voorbeeld van een oplossing rond een irregulier singulier punt: beschouw de d.v. $z^2y' + y = 0$. $z = 0$ is een irregulier singulier punt, en de oplossing is $y(z) = C \cdot e^{1/z}$ met $C \in \mathbf{C}$. Merk op dat $z = \infty$ een gewoon punt is van de d.v.

§1.6. De hypergeometrische differentiaalvergelijking.

Beschouw de tweede orde d.v.

$$y''(z) + P(z)y'(z) + Q(z)y(z) = 0 \tag{1.14}$$

met P, Q meromorfe functies op een gebied $G \subset \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Zoals we in Propositie 1.3 gezien hebben gaat bij de substitutie $t = 1/z$, $w(t) = y(z)$, de d.v. over in een tweede-orde lineaire d.v.

$$w''(t) + R(t)w'(t) + S(t)w(t) = 0$$

waarbij R, S meromorfe functies zijn op het gebied G' (waarbij $t \in G'$ precies als $z \in G$). Meer in het algemeen gaat de d.v. voor $y(z)$ bij een *Möbius-transformatie* $t = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $w(t) = y(z)$, over in een tweede-orde lineaire d.v. voor $w(t)$ met meromorfe coëfficiënten. Laat nu $G = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Meromorfe functies op G zijn precies de rationale functies. Beschouw de d.v. (1.14) met P, Q rationale functies. D.m.v. een Möbius-transformatie kunnen we drie voorgeschreven punten z_1, z_2, z_3 in G transformeren in drie willekeurige voorgeschreven punten w_1, w_2, w_3. We gaan na, welke d.v. (1.14) hoogstens drie reguliere singuliere punten hebben.

Fuchse d.v. met hoogstens één singulier punt. Door een geschikte Möbiustransformatie toe te passen, kunnen we aannemen dat alle punten $z \in \mathbf{C}$ niet-singulier zijn. P en Q zijn dan analytisch op $\mathbf{C}$ en dus polynomen. Omdat $z = \infty$ niet-singulier of een regulier singulier punt is, bestaan volgens Prop.1.3 $\lim_{z\to\infty} zP(z)$ en $\lim_{z\to\infty} z^2Q(z)$ in $\mathbf{C}$. Dit is alleen mogelijk als P en Q beide nul zijn. De d.v. wordt dan $y''(z) = 0$. In dit geval is $z = \infty$ een regulier singulier punt omdat $\lim_{z\to\infty} 2z - z^2P(z)$ niet eindig is. Er zijn dus geen tweede orde d.v. zonder singuliere punten.

Fuchse d.v. met twee reguliere singuliere punten. We kunnen aannemen dat de singuliere punten in $z = 0$ en $z = \infty$ liggen. $P(z)$ heeft in $z = 0$ een pool van hoogstens orde één, en $Q(z)$ heeft in $z = 0$ een pool van orde hoogstens twee. Dus $zP(z) = p(z)$ en $z^2Q(z) = q(z)$ zijn polynomen. Omdat volgens Prop.1.3 $p(z)$ en $q(z)$ begrensd zijn, zijn beide constant. De d.v. (1.14) is dus van de vorm

$$z^2y''(z) + pzy'(z) + qy(z) = 0,$$

een d.v. van Euler-type.

Fuchse d.v. met drie reguliere singuliere punten. We kunnen aannemen dat de singuliere punten in $z = 0$, $z = 1$ en $z = \infty$ liggen. Het is eenvoudig in te zien dat $P(z) = \dfrac{p(z)}{z(z-1)}$ en $Q(z) = \dfrac{q(z)}{z^2(z-1)^2}$ waarbij p en q polynomen van graad hoogstens 1, resp. 2 zijn. Laat $y(z) = z^\alpha(z-1)^\beta u(z)$ voor zekere $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$. Dan heeft de d.v. voor u eveneens (hoogstens) reguliere singuliere punten in $z = 0, 1$ en ∞. Door α en β geschikt te kiezen, kunnen we bereiken dat in de d.v. voor u de coëfficiënt $q(z) = cz(z-1)$, m.a.w. de d.v. voor u is te schrijven in de vorm

$$z(1-z)u''(z) + (b - (a+c+1)z)u'(z) - acu(z) = 0. \tag{1.15}$$

Vergelijking (1.15) heet de *hypergeometrische differentiaalvergelijking*. De indiciaalvergelijking voor $z = 0$ is $\rho(\rho + b - 1)$. Een van de oplossingen is dus analytisch en is (afgezien van een constante factor) gelijk aan de hypergeometrische functie

$$F(a, c; b; z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c+n)}{\Gamma(b+n)n!} z^n.$$

De convergentiestraal is gelijk aan 1. De substitutie $u(z) = z^{1-b}v(z)$ leidt verder tot een hypergeometrische d.v. voor v:

$$v''(z)z(1-z) + v'(z)(2-b-(3-2b+a+c)z) - v(z)(a-b+1)(c-b+1) = 0$$

met als oplossing $v(z) = F(a-b+1, c-b+1; 2-b; z)$. een basis van oplossingen van (1.15) rond $z = 0$ bestaat dus uit de twee functies $u_1(z) = F(a, c; b; z)$ en $u_2(z) = z^{1-b}F(a-b+1, c-b+1; 2-b; z)$. Door ontwikkelingen rond $z = 1$ en $z = \infty$ te beschouwen, kunnen we relaties afleiden tussen verschillende hypergeometrische functies, de zogenaamde Kummer-relaties. Er zijn 24 van dergelijke relaties; een aantal hiervan wordt in de opgaven bestudeerd.

M.b.v. de hypergeometrische functie kunnen een aantal meer elementaire functies worden uitgedrukt. Zo is $(1-z)^{-a} = F(a, c; c; z)$, $\ln(1+z) = -zF(1, 1; 2; -z)$, het n-de Legendrepolynoom $P_n(z) = P_n(0)F(-n, n+1; 1; (1+z)/2)$.

§1.7. De confluente hypergeometrische differentiaalvergelijking.

Beschouw de hypergeometrische d.v. (1.15). Laat $r > 0$ en $\xi = rz$, $w(\xi) = y(z)$. Dan is

$$\xi(1-\xi/r)w''(\xi) + (b-(a+c+1)(\xi/r))w'(\xi) - (ac/r)w(\xi) = 0.$$

De d.v. voor w heeft reguliere singuliere punten in $\xi = 0, r$ en ∞. We laten nu $r \to \infty$ en tegelijkertijd $c = r$. De d.v. gaat over in

$$\xi w''(\xi) + (b-\xi)w'(\xi) - aw(\xi) = 0. \tag{1.16}$$

(1.16) heet de *confluente hypergeometrische differentiaalvergelijking*. De regulire singuliere punten $\xi = r$ en $\xi = \infty$ zijn door de limietovergang in elkaar overgegaan en (1.16) heeft een irregulier singulier punt in $\xi = \infty$ en een regulier singulier punt in $\xi = 0$. (1.16) heeft een oplossing

$$F(a; b; z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(b+n)n!} z^n.$$

$F(a; b; z)$ heet een *confluente hypergeometrische functie*. Een tweede lineair onafhankelijke oplossing is $z^{1-b}F(a-b+1; 2-b; z)$. Net als bij de hypergeometrische functies geldt dat een aantal meer elementaire functies uit te drukken is in termen van $F(a; b; z)$; zo is $e^z = F(a; a; z)$.

§1.8. De geadjungeerde differentiaaloperator.

Beschouw op het interval $\Omega = [a, b]$ de lineaire tweede-orde differentiaalvergelijking $p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = 0$ voor zekere functies $p, q, r; [a, b] \to \mathbf{R}$, waarbij $p(x) \neq 0$ op (a, b). We kunnen de differentiaalvergelijkig schrijven als een operatorvergelijking $Ly = 0$ waarbij L de *differentiaaloperator* $L = p(x)\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\frac{d}{dx} + r(x)$ is. L is een lineaire afbeelding op de vectorruimte V van functies die tweemaal differentieerbaar zijn op (a, b) en eenmaal continu differentieerbaar op $[a, b]$, m.a.w. $L(\lambda y + \mu z) = \lambda Ly + \mu Lz$ voor scalairen λ, μ en $y, z \in V$. We veronderstellen verder dat de functies p, q, r continu op $[a, b]$ en voldoende vaak differentieerbaar op (a, b) zijn. Voor $y, z \in V$ is nu

$$\int_a^b (p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x))z(x)dx = [p(x)y'(x)z(x) - (p(x)z(x))'y(x) +$$

$$+q(x)y(x)z(x)|_a^b + \int_a^b ((pz)''(x) - (qz)'(x) + r(x)z(x))y(x)dx \tag{1.17a}$$

ofwel

$$\int_a^b z(x)Ly(x)dx - \int_a^b y(x)L^\dagger z(x)dx = B(y,z)(b) - B(y,z)(a) \tag{1.17b}$$

waarbij

$$L^\dagger(z) = (pz)'' - (qz)' + rz, \quad \text{en } B(y,z)(x) = p(x)y'(x)z(x) - (pz)'(x)y(x) + q(x)y(x)z(x).$$

$L^\dagger$ heet de *geadjungeerde* (differentiaaloperator) van L. (1.17) heet de *Lagrange-identiteit*.

De operator L heet *zelfgeadjungeerd* of *hermites* als $L = L^\dagger$. Dit is het geval dan en slechts dan als voor alle (voldoende vaak differentieerbare) y geldt dat $(py)'' - (qy)' + ry = py'' + qy' + ry$ en dit is het geval indien $p' = q$. In dit geval kunnen we schrijven $Ly = (py')' + ry$.

Voor een willekeurige differentiaaloperator $L = p\frac{d^2}{dx^2} + q\frac{d}{dx} + r$ met voldoende vaak differentieerbare coëfficiënten en zodanig dat $p(x) \neq 0$ op $[a,b]$ bestaat er een functie $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ zodanig dat de operator gL zelfgeadjungeerd is: de gezochte functie g is een oplossing van de d.v. $(gp)' = gq$ dus $g(x) = \dfrac{1}{p(x)} \exp(\displaystyle\int_c^x \frac{q(t)}{p(t)} dt)$. Voor de nulpunten van oplossingen van zelfgeadjungeerde differentiaaloperatoren geldt het volgende resultaat:

Stelling 1.5: Laat $p, q_1, q_2 : [a,b] \to \mathbf{R}$ continue functies zijn zodanig dat $p(x) > 0$ en $q_1(x) \leq q_2(x)$ voor $x \in [a,b]$. Neem aan dat

$$(py')'(x) + q_1(x)y(x) = 0, \qquad (pz')'(x) + q_2(x)z(x) = 0$$

voor $x \in (a,b)$ en $y, z \neq 0$. Dan ligt tussen elk tweetal nulpunten van y een nulpunt van z, tenzij $q_1 = q_2$ en y, z lineair afhankelijk zijn.

Bewijs: Laat c, d twee opeenvolgende nulpunten zijn van y in (a,b). We kunnen aannemen dat $y(x) > 0$ voor $c < x < d$ (neem anders $-y$ i.p.v. y). Dan geldt dat $y'(c) > 0$ en $y'(d) < 0$; als immers $y(c) = y'(c) = 0$ (resp. $y(d) = y'(d) = 0$) volgt $y(x) = 0$ (vergelijk de opmerking onder Propositie 1.1). Neem aan dat $z(x) > 0$ voor $c < x < d$. Dan is $z(c), z(d) \geq 0$ en

$$0 \geq p(d)y'(d)z(d) - p(c)y'(c)z(c) = p(x)(y'(x)z(x) - y(x)z'(x))\Big|_c^d =$$

$$= \int_c^d ((py')'(x)z(x) - (pz')'(x)y(x))\,dx = \int_c^d (q_2(x) - q_1(x))y(x)z(x)dx \geq 0.$$

Dit is alleen mogelijk als het linker-en rechterlid nul zijn. In dit geval is $q_1 = q_2$ en $z(c) = z(d) = 0$, dus $z(x) = \lambda y(x)$ voor zekere $\lambda \in \mathbf{R}$.

§1.9. Integraaloplossingen van differentiaalvergelijkingen.

Beschouw de tweede-orde differentiaalvergelijking

$$L_x y(x) = p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = 0, \qquad (x \in G) \tag{1.18}$$

waarbij G een open deelverzameling van $\mathbf{C}$ is. We zoeken een oplossing van de vorm $y(x) = \int_C g(t)K(x,t)dt$ waarbij C een kromme in $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ is met beginpunt a en eindpunt b, en $g : C \to \mathbf{C}$, $K : G \times C \to \mathbf{C}$ continue functies zijn. K heet een integraalkern. Neem nu aan dat er een van t afhankelijke differentiaaloperator M_t bestaat, zodanig dat $M_t K(x,t) = L_x K(x,t)$. Als dan g een oplossing is van de d.v. $M_t^\dagger g = 0$ en verder $B(g,K)(a) = B(g,K)(b)$ voor $B(y,z) = py'z - (pz)'y + qyz$, dan is volgens vergelijking (1.17)

$$L_x y(x) = \int_C g(t)L_x K(x,t)dt = \int_C g(t)M_t K(x,t)dt = \int_C M_t^\dagger g(t)K(x,t) = 0,$$

m.a.w. $y(x) = \int_C g(t)K(x,t)dt$ is een oplossing van (1.18). In het algemeen wordt de kern $K(x,t)$ van tevoren gekozen, $g(t)$ volgt dan uit de vergelijking $M_t^\dagger g = 0$ en de kromme C wordt bepaald door aan de eis dat $B(g,K)(a) = B(g,K)(b)$ te voldoen. Een andere keuze voor C leidt i.h.a. tot een andere oplossing. Een aantal gebruikelijke kernen zijn:

i. $K(x,t) = e^{-xt}$, de Laplace-kern.

ii. $K(x,t) = e^{ixt}$, de Fourier-kern.

i. $K(x,t) = (x-t)^\alpha$, de Euler-kern.

i. $K(x,t) = t^x$, de Mellin-kern.

i. $K(x,t) = tJ_n(x,t)$, de Hankel-kern.

We geven een tweetal voorbeelden:

1. De Besselfunctie J_n. Voor $n = 0, 1, 2, \ldots$ voldoet de n-de Besselfunctie $y(x) = J_n(x)$ aan de vergelijking $L_x y(x) = 0$ waarbij de differentiaaloperator $L_x = x^2\dfrac{d^2}{dx^2} + x\dfrac{d}{dx} + (x^2 - n^2)$. Laat $K(x,t) = e^{ix\cos t}$. Dan is

$$L_x K(x,t) = (-x^2\cos^2 t + ix\cos t + x^2 - n^2)K(x,t) = (x^2\sin t + ix\cos t - n^2)K(x,t) =$$

$$= (-\frac{d^2}{dt^2} - n^2)K(x,t) = M_t K(x,t)$$

waarbij $M_t = -\dfrac{d^2}{dt^2} - n^2$. Nu is $M_t^\dagger g(t) = -g''(t) - n^2 g(t) = 0$ als we $g(t) = e^{\pm int}$ nemen. Laat verder $C = [0, 2\pi]$. Dan is $B(g,K)(0) = B(g,K)(2\pi)$. De functie $y(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ix\cos t - int}dt = $ $= \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ix\cos t + int}dt$ is nu een oplossing van de n-de orde Besselvergelijking. Omdat J_n op een constante factor na de enige analytische oplossing is van de Besselvergelijking, en $J_n^{(k)}(0) = 0$ voor $0 \le k < n$ en $J_n^{(n)}(0) = (1/2)^n$, terwijl anderzijds

$$\frac{d^n}{dx^n}\int_0^{2\pi} e^{ix\cos t - int}dt\Big|_{x=0} = \int_0^{2\pi}(i\cos t)^n e^{-int}dt = 2\pi(i/2)^n,$$

is

$$J_n(x) = \frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\cos t - int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\cos t - in(t+\pi/2)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\sin u - inu}du. \quad (1.19)$$

2. De hypergeometrische functie. We nemen $K(x,t) = (x-t)^s$. De d.v. is $L_x(y) = x(1-x)y'' + (b-(a+c+1)x)y' - acy$. Dan is

$$L_x K(x,t) = \Big(s(s-1)\frac{x-x^2}{(x-t)^2} + s\frac{b-(a+c+1)x}{x-t} - ac\Big)K(x,t).$$

Herschikking van termen geeft

$$L_x K(x,t) = \Big((t-t^2)\frac{d^2}{dt^2} + \big((2t-1)(s-1) + (a+c+1)t - b\big)\frac{d}{dt} - (s+a)(s+c)\Big)K(x,t).$$

We kiezen nu $s = -a$ zodat

$$M_t = (t-t^2)\frac{d^2}{dt^2} + \big((2t-1)(-a-1) + (a+c+1)t - b\big)\frac{d}{dt} = (t-t^2)\frac{d^2}{dt^2} + \big((-a+c-1)t + a - b + 1\big)\frac{d}{dt}.$$

Nu wordt $g(t)$ bepaald uit

$$M_t^\dagger g(t) = \big((t-t^2)g(t)\big)'' - \Big(\big((-a+c-1)t + a - b + 1\big)g(t)\Big)' = 0.$$

Dit levert een oplossing $g(t) = (t-1)^{b-c-1}t^{a-b}$. Als $\mathrm{Re}(c) > 0$ en $\mathrm{Re}(b-c) > 1$, dan is

$$B(K,g)(t) = t(1-t)g(t)\frac{d}{dt}(x-t)^{-a} - \big(t(1-t)g(t)\big)'(x-t)^{-a} + g(t)(x-t)^{-a}q(t) = 0$$

voor $q(t) = (c-a+1)t + a - b + 1$ als $t = 1$ of $t = \infty$. Een oplossing wordt dus gegeven door $y(x) = \int_1^\infty (t-1)^{b-c-1}t^{a-b}(t-x)^{-a}dt$. Door de substitutie $u = 1/t$ wordt de integraal gelijk aan $y(x) = \int_0^1 (1-u)^{b-c-1}u^{c-1}(1-xu)^{-a}du$. Dit levert een analytische oplossing voor $|x| < 1$ als $\mathrm{Re}(b-c) > 0$ en $\mathrm{Re}(c) > 0$. Op een factor na is dit gelijk aan $F(a,c;b;x)$. Door $x = 0$ in te vullen kunnen we de factor bepalen en vinden tenslotte, m.b.v. de relatie

$$\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}du = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{1.20}$$

voor $\mathrm{Re}(p) > 0$, $\mathrm{Re}(q) > 0$ (de betafunctie van Euler) dat

$$F(a,c;b;x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}\int_0^1 (1-u)^{b-c-1}u^{c-1}(1-xu)^{-a}du. \tag{1.21}$$

Door $(1-xu)^{-a}$ in een machtreeks te ontwikkelen en (1.20) te gebruiken vinden we dat de integraal in (1.20) voor $|x| < 1$ en $\mathrm{Re}(b-c) > 0$ en $\mathrm{Re}(c) > 0$ inderdaad gelijk is aan $F(a,c;b;x)$.

Een integraaluitdrukking voor de confluente hypergeometrische functie vinden we, net als in §1.7, door x te vervangen door ξ/a en vervolgens $a \to \infty$ te laten gaan. Dit geeft, met $\lim_{a\to\infty}(1-\xi u/a)^{-a} = e^{\xi u}$,

$$F(c;b;\xi) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}\int_0^1 (1-u)^{b-c-1}u^{c-1}e^{\xi u}du. \tag{1.22}$$

De integraal convergeert voor alle $\xi \in \mathbf{C}$.

§1.10. Asymptotische ontwikkelingen. De zadelpuntmethode.

Laat f en $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ reële functies zijn gedefinieerd in een omgeving van $x = a$ (resp. voor $x > R$, $x < -R$ als $a = \infty$ of $a = -\infty$) zodanig dat $\lim\limits_{x\to a} \phi_{k+1}(x)/\phi_k(x) = 0$ voor $k = 1, \ldots, n-1$ en $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) - \sum\limits_{j=1}^{k} \phi_j(x)\big)/\phi_k(x) = 0$. Dan heet $\sum\limits_{k=1}^{n} \phi_k(x)$ een *asymptotische ontwikkeling* van $f(x)$ voor $x \to a$. n kan hierbij oneindig zijn. De notatie voor een asymptotische ontwikkeling is $f(x) \sim \sum\limits_{k=1}^{n} \phi(x)$. Merk op dat in het geval dat $n = \infty$ de asymptotische reeks i.h.a. niet convergeert.

Een bruikbare methode om asymptotische ontwikkelingen te vinden is d.m.v. partiële integratie:
Voorbeeld:

$$\int_x^\infty e^{-t^2} dt = -\int_x^\infty \frac{[e^{-t^2}]'}{2t} dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} + \int_x^\infty \frac{[e^{-t^2}]'}{4t^3} dt = \ldots =$$

$$= e^{-x^2}\Big(\frac{1}{2x} - \frac{1}{4t^3} + \ldots - \frac{(-1)^n(2n-3)!!}{2^n x^{2n-1}}\Big) + \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n} \int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2n}} dt.$$

We behandelen een methode die een asymptotische ontwikkeling levert voor integralen van de vorm $I(x) = \int_C g(z) e^{xf(z)} dz$ waarbij C een kromme is in het complexe vlak, en f en g analytische functies op C zijn. x is een positieve reële parameter. We bepalen een asymptotische ontwikkeling voor grote waarden van x: Splits $f(z)$ in een reëel en een imaginair deel: $f(z) = u(z) + iv(z)$. Het idee achter de methode is, dat de integrand groot is in de buurt van een maximum van $u(z)$ en de waarde van de integraal voor grote x bijna uitsluitend komt van het gedeelte van de kromme in de buurt van het maximum van $u(z)$. Neem aan dat u in z_0 een maximum aanneemt, en dat de integratiekromme vervormd kan worden in het gebied waar f en g analytisch zijn zodanig dat deze door z_0 gaat. We laten de eindpunten van de kromme invariant, zodat de waarde van de integraal niet verandert. Om te voorkomen dat de bijdrage aan de integraal van de factor $e^{xu(z)}$ teniet gedaan door het oscillerend gedrag van de factor $e^{ixv(z)}$ nemen we verder aan dat in een omgeving van z_0 de functie $v(z)$ constant is op de (vervormde) integratiekromme C'. In dit geval is de richting van de C' in een omgeving van z_0 gelijk aan de richting van de gradiënt ∇u van u. De kromme volgt dus de richting waar het verval van u het sterkst is en wordt daarom ook wel een kromme van steilste verval (*curve of steepest descent*) genoemd. Merk op dat dit de richting van de kromme door z_0 uniek vastlegt. Omdat $u_x(z_0) = u_y(z_0) = 0$, is $f'(z_0) = 0$. We nemen aan dat $f''(z_0) \neq 0$. (In het geval dat $f''(z_0) = 0$ en $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ voor zekere $k > 2$, verloopt de verdere afleiding analoog.) We verwaarlozen de bijdrage aan de integraal voor het deel van de integratiekromme waar $v(z)$ niet constant is. Aangezien we alleen de eerste term in de asymptotische ontwikkeling zullen afleiden, benaderen we $f(z)$ rond $z = z_0$ d.m.v. $f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z - z_0)^2$. Laat $z - z_0 = re^{i\theta}$ en $f''(z_0) = 2\rho e^{i\psi}$ zijn. Uit $\mathrm{Im}(z - z_0)^2 f''(z_0)$ constant volgt dat $2\theta + \psi = k\pi$ voor zekere $k \in \mathbf{Z}$. Uit het feit dat $\mathrm{Re}(z - z_0)^2 f''(z_0)$ een maximum aanneemt voor $z = z_0$, volgt verder dat k oneven is, dus $\psi + 2\theta = \pm\pi$. Neem tenslotte aan dat de kromme C' zodanig wordt doorlopen dat na het passeren van het punt z_0, $r > 0$ is. Dit legt de hoek θ eenduidig vast. Verder parametriseren we C' rond z_0 d.m.v. de variabele t met $t^2 = r^2\rho$ zodat $z = z_0 + \dfrac{t}{\sqrt{\rho}} e^{i\theta}$. Dan wordt voor grote x

$$I(x) = \int_C g(z) e^{xf(z)} dz \sim g(z_0) e^{xf(z_0)} \int_{-\infty}^\infty e^{-xt^2} \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{i\theta} dt = g(z_0) e^{xf(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{x|f''(z_0)|}} e^{i\theta}, \quad (1.23)$$

waarbij we het integratie-interval hebben uitgebreid tot $(-\infty, \infty)$ omdat voor grote x vrijwel de gehele bijdrage van de integraal komt van een klein interval rond $t = 0$.

We hebben alleen de eerste, d.w.z. grootste term in de asymptotische ontwikkeling afgeleid. Meer termen kunnen we verkrijgen door zowel meer termen van de machtreeks van $g(z)$ rond $z = z_0$ te beschouwen, als hogere orde termen van de machtreeks van $f(z)$ (zie Hassani, blz...).

Voorbeeld: de formule van Stirling voor de gammafunctie.

Voor Re $x > -1$ wordt $\Gamma(x+1)$ gedefinieerd door de integraal $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-z} z^x dz$. We laten nu $x \in \mathbf{R}$ en leiden een asymptotische uitdrukking af voor grote x. $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{xf(z)} dz$ met $f(z) = \ln z - z/x$. De functie $f(z)$ is analytisch op het integratieinterval $(0, \infty)$ en neemt een maximum aan in $z_0 = x$ waarbij $f'(x) = 0$. (Omdat de grootste bijdrage van de integraal komt van het gedeelte rond $z = x$ is het onbelangrijk dat $f(z)$ niet analytisch is in $z = 0$, aangezien de integraal convergeert.) Nu is $f''(x) = -1/x^2 < 0$ en $\theta = \arg(z - x) = 0$ als $z > x$. Toepassen van formule (1.20) met $g(z) = 1$ geeft

$$\Gamma(x+1) \sim e^{xf(x)} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{x \cdot 1/x^2}} = \sqrt{2\pi x}\, x^x e^{-x}. \tag{1.24}$$

(1.24) staat bekend als de *formule van Stirling.*