VII. Differentiaalmeetkunde.

§7.1. Tensoranalyse in de Euclidische ruimte.

Beschouw de n-dimensionale Euclidische ruimte E_n. Door een punt als oorsprong O te kiezen en een rechthoekig assenstelsel met een orthonormale basis $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ aan te geven, kunnen we op E_n de structuur leggen van een vectorruimte isomorf met $\mathbf{R}^n$. Verder kunnen we elk punt P van E_n opvatten als de oorsprong van een n-dimensionale reële vectorruimte en dus in elk punt een aparte vectorruimte leggen. Deze vectorruimte heet de *raakruimte* aan E_n in P (notatie $T_P E_n$). De reden voor deze naamgeving wordt verderop duidelijk. Door een continue keuze van orthonormale bases $\{\mathbf{e}_1(P), \ldots, \mathbf{e}_n(P)\}$ van de raakruimten te maken, krijgen we een zogenaamde *vectorbundel.* Als verzameling is dit $\bigcup_{P \in E_n} T_P E_n$. Hierbij is E_n de *onderliggende (of basis-)ruimte*, en de raakruimte $T_P E_n$ is de *vezel* boven P. Lokaal (d.w.z. "boven" een open deel U van E_n) ziet de vectorbundel er dan uit als het Cartesisch product $U \times \mathbf{R}^n$. We zullen het begrip vectorbundel in dit college niet verder gebruiken maar wel gebruik maken van het feit dat in elk punt van E_n een raakruimte is gedefinieerd.

Door aan geheel E_n de structuur van een vectorruimte $\mathbf{R}^n$ te geven d.m.v. de keuze van een oorsprong en een orthonormale basis $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, kunnen we aan elk punt P van E_n coördinaten toekennen: als

$$\overrightarrow{OP} = x^1 \mathbf{e}_1 + \ldots + x^n \mathbf{e}_n,$$

dan zijn $(x^1, \ldots, x^n)$ Cartesische coördinaten van P. Verschillende Cartesische coördinaten $(x^1, \ldots, x^n)$ en $(x'^1, \ldots, x'^n)$ van een punt P zijn aan elkaar gerelateerd door een basistransformatie van de vorm $x'^i = A^i_j x^j + b^i$ waarbij A een vaste (dus van P onafhankelijke) orthogonale matrix is, en de vector b (met componenten b^i) een vaste vector in $\mathbf{R}^n$. We zullen in het vervolg de Euclidische ruimte E_n waarin een oorsprong en een orthonormale basis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ is gekozen (waarmee E_n de structuur van een vectorruimte krijgt), aanduiden met $\mathbf{R}^n$. De gekozen orthonormale basis is de standaardbasis van $\mathbf{R}^n$. De coördinaten t.o.v. deze standaardbasis geven we aan met $x^1, \ldots, x^n$. Dit is dus een stelsel van Cartesische coördinaten.

Naast Cartesische coördinaten zijn er ook andere, meer algemene (kromlijnige) coördinatenstelsels te definiëren:

Definitie: Zij U een open deelverzameling van $\mathbf{R}^n$: laat op U n naar $x^1, \ldots, x^n$ differentieerbare functies $y^1 = y^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, y^n = y^n(x^1, \ldots, x^n)$ gegeven zijn zodanig dat de Jacobiaan $\begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}$ overal op U inverteerbaar is, dan zijn $y^1, \ldots, y^n$ reguliere (kromlijnige) coördinaten op U en de coördinatentransformatie $x^1, \ldots, x^n \to y^1, \ldots, y^n$ heet dan een *toelaatbare of reguliere coördinatentransformatie.*

Volgens de inverse functiestelling is de coördinatentransformatie in dat geval omkeerbaar, d.w.z. $x^1, \ldots, x^n$ zijn op U differentieerbare functies van $y^1, \ldots, y^n$ en de Jacobiaan van de inverse coördinatentransformatie is de inverse van de Jacobiaan van de transformatie zelf. In het algemeen noemen we een coördinatentransformatie $y^1, \ldots, y^n \to z^1, \ldots, z^n$ tussen reguliere coördinaten regulier. Merk op dat de Jacobiaan van zo'n transformatie altijd inverteerbaar is.

Voorbeelden: 1. Laat $U \subset E_2$ geheel $\mathbf{R}^2$ maar met weglating van de halve rechte $\{x^2 = 0, x^1 \geq 0\}$ zijn. Dan zijn de poolcoördinaten r, ϕ gedefinieerd door $x^1 = r\cos\phi,\ x^2 = r\sin\phi$ op U reguliere kromlijnige coördinaten: ga na dat de transformatie $x^1, x^2 \to r, \phi$ op U regulier is.

2. Laat $U \subset \mathbf{R}^3$ de deelverzameling van $\mathbf{R}^3$ zijn die ontstaat door het halfvlak $x^2 = 0, x^1 \geq 0$ weg te laten. Dan zijn de *cilindercoördinaten* ρ, ϕ, z gegeven door

$$x^1 = \rho \cos \phi,\ x^2 = \rho \sin \phi,\ x^3 = z$$

met $\rho > 0, 0 < \phi < 2\pi, z \in \mathbf{R}$ reguliere coördinaten op U.
3. Laat $U \subset \mathbf{R}^3$ als in het vorige voorbeeld zijn. Dan zijn de bolcoördinaten r, θ, ϕ gegeven door

$$x^1 = r \sin \theta \cos \phi,\ x^2 = r \sin \theta \cos \phi,\ x^3 = z$$

reguliere coördinaten op U.

Raakvectoren, de raakruimte en de coraakruimte. Laat $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ een gladde kromme zijn, d.w.z. $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ is een continu differentieerbare functie van t. Laat verder $a < c < b$ en $\gamma(c) = P$. De vector $\gamma'(c) = ((x^1)'(c), \ldots, (x^n)'(c))$ heet de *raakvector* aan de kromme γ in P. $\gamma'(c)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1, 0, \ldots), (0, 1, \ldots), \ldots$ en de raakvectoren vormen samen de raakruimte $T_P\mathbf{R}^n$ in het punt P. De dimensie van de raakruimte is n en een basis wordt gevormd door de vectoren $\frac{\partial}{\partial x^1} = (1, 0, \ldots), \frac{\partial}{\partial x^2} = (0, 1, \ldots), \ldots$. I.p.v. $\frac{\partial}{\partial x^j}$ schrijven we ook, korter, ∂_j. Laat nu $y^1, \ldots, y^n$ reguliere coördinaten op een open deel $U \subset \mathbf{R}^n$ zijn en $P \in U$. Laat γ als boven zijn en $\gamma(c) = P$. Vanwege de kettingregel is $(x^j)'(c) = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(y^i)'(c)$. De raakvector $\gamma'(c) = (x^j)'(c)\frac{\partial}{\partial x^j}$ kunnen we dus ook schrijven als $(y^i)'(c)\frac{\partial}{\partial y^i}$ en het verband tussen de twee bases van de raakruimte wordt dus gegeven door

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^j} \tag{7.1}$$

en voor de componenten van een raakvector geldt

$$(y^i)'(c) = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x^j)'(c). \tag{7.2}$$

Vergelijken van (7.2) met (6.3) toont aan dat de raakvectoren contravariante tensoren van rang 1 zijn. De kromme γ definieert een raakvector op elk punt $\gamma(t)$ met $a < t < b$ langs de kromme. Dit levert een *raakvectorveld* langs de kromme. Op soortgelijke wijze is een *tensorveld* T van rang (r, s) op een deelverzameling $W \subset \mathbf{R}^n$ een continue functie die een punt P in W afbeeldt op een tensor van rang (r, s) in $\mathcal{T}_s^r(T_P\mathbf{R}^n)$. Een scalair veld is een tensorveld van rang (0,0). Een tensorveld wordt gekarakteriseerd door het feit dat de componenten bij een coördinatentransformatie transformeren als (6.3). Zoals al eerder is opgemerkt, wordt dit in (vooral de oudere) fysische literatuur dikwijls als definitie van een tensor(veld) gehanteerd.
De duale $T_P(\mathbf{R}^n)^*$ van de raakruimte heet de *coraakruimte*. Laat U een open omgeving zijn van P, en $y^1, \ldots, y^n$ reguliere coördinaten op U. Een basis van T_PM wordt gegeven door $\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}\}$. De duale basis geven we aan met $\{dy^1, \ldots, dy^n\}$. dy^i is dus een covector en $dy^i(\partial_j) = \delta^i_j$. Laat nu $f : U \to \mathbf{R}$ een functie zijn. De *differentiaal* van f is gedefinieerd als

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}dx^n. \tag{7.3}$$

Ga na dat we deze ook kunnen schrijven als

$$df = \frac{\partial f}{\partial y^1}dy^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y^n}dy^n,$$

m.a.w. df is een covectorveld (of 1-vorm) op U en voor een vectorveld X geldt

$$df(X) = (df)(X^i \partial_i) = \frac{\partial f}{\partial y^j} X^i dx^j(\partial_i) = X^j \frac{\partial f}{\partial y^j} =: X(f).$$

De metrische tensor. Laat $y^1, \dots, y^n$ reguliere coördinaten op $U \subset \mathbf{R}^n$ zijn. Om hoeken en afstanden te meten gebruiken we het (standaard-)inwendig product $(\ ,\ )$ op $\mathbf{R}^n$. Per definitie is (voor Cartesische coördinaten) $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta_i^j$. Dan is

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^\ell}\right) = \frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial x^j}{\partial y^\ell}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial x^i}{\partial y^\ell}. \tag{7.4}$$

De componenten van het inwendig product gedragen zich dus als een covariante tensor van rang 2. Deze (symmetrische) tensor g heet de *metrische tensor*. De componenten van g t.o.v. een gegeven coördinatenstelsel $\{y^1, \dots, y^n\}$ zijn dus $g_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right)$. Merk op dat we de metrische tensor kunnen schrijven als $g_{ij} dy^i \otimes dy^j$. Meestal laat men het tensorproductsymbool weg en schrijft $g = g_{ij} dy^i dy^j$ of ook wel $ds^2 = g_{ij} dy^i dy^j$. We komen later nog op deze notatie terug.

Laat J de matrix zijn met componenten $J_{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}$ en G de matrix met componenten $g_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right)$. Dan is volgens (7.4) $g_{k\ell} = J_{ik} J_{i\ell}$ dus $G = J^T J$. De matrix G is dus inverteerbaar. Laat $(G^{-1})_{ij} = g^{ij}$ zijn. Dan is dus $g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$ en hieruit kunnen we afleiden dat g^{ij} de componenten zijn van een contravariante tensor van rang 2, de *inverse metrische tensor*.

De metrische tensor en de inverse metrische tensor kunnen worden gebruikt om van een vector een covector te maken en omgekeerd: als v een vector is met componenten $v^1, \dots, v^n$, dan levert contractie met de metrische tensor een covector op met componenten $v_1 = g_{1j} v^j, \dots, v_n = g_{nj} v^j$. Omgekeerd is $v^j = g^{jk} v_k$. Een voorbeeld is de gradiënt ∇f van een functie $f : U \to \mathbf{R}$, een vector met componenten $(\nabla f)^j = g^{jk} (df)_k = g^{jk} \frac{\partial f}{\partial y^k}$.

Voorbeeld: poolcoördinaten in $\mathbf{R}^2$. We hebben eerder gezien dat de poolcoördinaten r, ϕ zijn gedefinieerd d.m.v. $x^1 = r \cos\phi$, $x^2 = r \sin\phi$. Poolcoördinaten zijn regulier op de open deelverzameling $U = \{r > 0, 0 < \phi < 2\pi\}$ van $\mathbf{R}^2$ (i.p.v. de halve rechte $\phi = 0, r \geq 0$ kan uiteraard ook een andere halve rechte $\phi = a, r \geq 0$ worden weggelaten). De raakvectoren in een punt met coördinaten r, ϕ zijn

$$\partial_r = \frac{\partial}{\partial r} = \cos\phi \partial_1 + \sin\phi \partial_2, \quad \partial_\phi = \frac{\partial}{\partial \phi} = -r \sin\phi \partial_1 + r \cos\phi \partial_2$$

waarbij $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $(j = 1, 2)$. De duale basis is

$$dr = \cos\phi dx^1 + \sin\phi dx^2, \quad d\phi = -\frac{1}{r} \sin\phi dx^1 + \frac{1}{r} \cos\phi dx^2.$$

De componenten van de metrische tensor in poolcoördinaten zijn

$$g_{rr} = (\partial_r, \partial_r) = 1,\ g_{r\phi} = g_{\phi,r} = (\partial_r, \partial_\phi) = 0,\ g_{\phi\phi} = (\partial_\phi, \partial_\phi) = r^2$$

en de inverse metrische tensor wordt gegeven door

$$g^{rr} = 1,\ g^{r\phi} = g^{\phi r} = 0,\ g^{\phi\phi} = \frac{1}{r^2}.$$

De metrische tensor is dus overal diagonaal (d.w.z. de gemengde componenten $g_{k\ell}$ met $k \neq \ell$ zijn alle 0). Coördinaten met deze eigenschap heten *orthogonale coördinaten.* Laat $W \subset U$ een open deelverzameling van U zijn en $f : W \to \mathbf{R}$ een differentieerbare functie. Dan is

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi$$

en de gradiënt van f is de vector

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \phi}\partial_\phi.$$

§7.2. De covariante afgeleide van een tensorveld. Parallelle verplaatsing.

Laat $\mathbf{v}$ een contravariant vectorveld zijn in $\mathbf{R}^n$. Zoals we weten, is de gradiënt $\nabla\mathbf{v}$ geen tensor onder algemene coördinatentransformaties. In feite geldt onder een coördinatentransformatie $x'^i \to x''^i$:

$$\frac{\partial v''^i}{\partial x''^j} = \frac{\partial v'^k}{\partial x'^\ell}\frac{\partial x''^i}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^\ell}{\partial x''^j} + v'^k \frac{\partial x'^\ell}{\partial x''^j}\frac{\partial^2 x''^i}{\partial x'^k \partial x'^\ell}. \tag{7.5}$$

Het rechterlid bestaat uit twee termen: de eerste, tensoriële, term geeft de verandering aan van de componenten van $\nabla\mathbf{v}$ onder een coördinatentransformatie. Als de tweede term nul zou zijn, dan zou $\nabla\mathbf{v}$ een tensor van rang (1,1) zijn. De tweede term is de bijdrage van de lokale verandering van het coördinatenstelsel. Deze term heet de affiene term. Als $x''^i = x^i$ Cartesische coördinaten zijn, dan kunnen we (7.5) herschrijven als

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^j}\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x'^\ell} = \frac{\partial v'^k}{\partial x'^\ell} + v'^m \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^m \partial x'^\ell}\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} = \frac{\partial v'^k}{\partial x'^\ell} + \Gamma^k_{\ell m} v'^m \tag{7.3}$$

waarbij de *Christoffel-symbolen* gedefinieerd zijn als $\Gamma^k_{\ell m} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^m \partial x'^\ell}\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}$. Indien x'^i ook Cartesische coördinaten zijn, dan is $\Gamma^k_{\ell m} = 0$. In het bijzonder volgt hieruit dat Γ^i_{jk} geen tensor is. We kunnen de Christoffelsymbolen uitdrukken m.b.v. de metrische tensor: laat g_{ij} de componenten van de metrisiche tensor zijn t.a.v. de coördinaten x'^i (we laten hier het accent weg; dit geeft geen verwarring, omdat de componenten van de metrische tensor t.a.v. Cartesische coördinaten δ_{ij} zijn). Dan is $g_{ij} = \frac{\partial x^\ell}{\partial x'^i}\frac{\partial x^\ell}{\partial x'^j}$ en dus is $\partial_k g_{ij} = \frac{\partial x^\ell}{\partial x'^i}\frac{\partial^2 x^\ell}{\partial x'^j \partial x'^k} + \frac{\partial x^\ell}{\partial x'^j}\frac{\partial^2 x^\ell}{\partial x'^i \partial x'^k}$, en $\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij}) = \frac{\partial x^\ell}{\partial x'^k}\frac{\partial^2 x^\ell}{\partial x'^i \partial x'^j}$. Tenslotte is

$$\Gamma^m_{ij} = \frac{\partial x'^m}{\partial x^\ell}\frac{\partial^2 x^\ell}{\partial x'^i \partial x'^j} = \frac{\partial x'^m}{\partial x^p}\frac{\partial x'^k}{\partial x^p}\frac{\partial x^\ell}{\partial x'^k}\frac{\partial^2 x^\ell}{\partial x'^i \partial x'^j} = \frac{1}{2}g^{mk}(\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij}). \tag{7.6}$$

We definiëren nu voor een contravariant vectorveld $\mathbf{v}$ met componenten v^i de *covariante afgeleide* als de tensor met componenten $\nabla_j v^i = \partial_j v^i + \Gamma^i_{jk} v^k$. (Merk op dat in de literatuur voor $\partial_j v^i$ ook wel $v^j_{,i}$ en voor $\nabla_j v^i$ ook wel $v^i_{;j}$ geschreven wordt.) De covariante afgeleide van een contravariant vectorveld is een tensor van rang $(1,1)$. Voor een covariant vectorveld (w_i) kunnen we op dezelfde manier te werk gaan, maar de volgende overweging geeft de covariante afgeleide van een covariant vectorveld op een snellere manier: voor een willekeurig contravariant vectorveld (v^i) is het inwendig product $v^i w_i$ een scalair veld en de afgeleiden $\partial_i \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$ van een scalair veld ϕ vormen de componenten van een covariant vectorveld van rang 1. De covariante afgeleide van een scalair veld is dus $\nabla_j \phi = \partial_j \phi$. We bekijken nu een covariant vectorveld w_i. Voor de covariante afgeleide leggen we de eis op dat de productregel moet gelden (immers deze geldt in het geval dat de coördinaten Cartesisch zijn; daar de covariante afgeleide een tensor is moet dit dan in het algemene geval nog steeds gelden) d.w.z. voor een willekeurig contravariant vectorveld v^i is $\partial_j(v^i w_i) = \nabla_j(v^i w_i) = (\nabla_j v^i) w_i + v^i(\nabla_j w_i)$. Uitwerken geeft

$$(\partial_j v^i) w_i + v^i(\partial_j w_i) = (\partial_j v^i) w_i + \Gamma^i_{jk} v^k w_i + v^i(\nabla_j w_i)$$

en omdat het veld (v^i) willekeurig is volgt dat

$$\nabla_j w_i = \partial_j w_i - \Gamma^k_{ji} w_k. \tag{7.7}$$

Dit is een vectorveld van rang $(0, 2)$. Merk op dat howel $\partial_i \omega_j$ niet de componenten van een tensor zijn, dit wel het geval is voor het antisymmetrische deel: $\partial_i \omega_j - \partial_j \omega_i = \nabla_i \omega_j - \nabla_j \omega_i$ is de component $(d\omega)_{ij}$ van een tensor van rang (0,2), de uitwendige afgeleide van ω (zie §7.6). Voor algemene tensorvelden kunnen we de regel voor de covariante afgeleide eveneens afleiden door gebruik te maken van de productregel: zo is de covariante afgeleide van een tensorveld (T^{ij}_k) van rang $(2, 1)$ gegeven door de productregel toe te passen op een tensorproduct $v^i w^j z_k$; we vinden dan $\nabla_\ell T^{ij}_k = \partial_\ell T^{ij}_k + \Gamma^i_{\ell m} T^{mj}_k + \Gamma^j_{\ell m} T^{im}_k - \Gamma^m_{\ell k} T^{ij}_m$. In het bijzonder geldt voor de metrische tensor dat $\nabla \mathbf{g} = 0$, d.w.z. $\nabla_i g_{jk} = 0$. Voor componenten van een tensor t.o.v. een Cartesisch coördinatenstelsel zijn de Christoffel-symbolen nul, en de covariante afgeleide is dan gelijk aan de gewone partiële afgeleide.

Als $\mathbf{v}$ een contravariant vectorveld op $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ is waarvoor geldt dat de covariante afgeleide nul is, dan zijn de componenten van $\mathbf{v}$ t.o.v. een Cartesisch coördinatenstelsel overal aan elkaar gelijk, d.w.z. de vectoren $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ zijn in alle $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ parallel. We kunnen nu de covariante afgeleide op de volgende manier meetkundig interpreteren: Voor de gewone (partiële) afgeleide van een vectorveld geldt voor een infinitesimaal kleine verplaatsing $\delta\mathbf{x}$ dat $v^i(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) - v^i(\mathbf{x}) = \partial_j v^i(\mathbf{x}) \delta x^j$. Ten opzichte van willekeurige coördinaten heeft het linkerlid niet een duidelijke betekenis: immers we vergelijken de i-coördinaat van twee vectoren in twee verschillende punten, waarbij de coördinaatbasis in beide punten verschilt. Om de bijdrage van de verandering van de coördinaatbasis te scheiden van de bijdrage die afkomt van de verandering in de richting van het vectorveld zelf splitsen we het linkerlid in twee stukken. We schrijven dan

$$\partial_j v^i \delta x^j = v^i(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) - v^i(\mathbf{x}) = (v^i(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) - v^i(\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \delta\mathbf{x})) + (v^i(\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) - v^i(\mathbf{x})).$$

Hierbij is $v^i(\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \delta\mathbf{x})$ de waarde die $v^i(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x})$ zou hebben als we de vector $\mathbf{v}$ parallel van $\mathbf{x}$ naar $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ zouden verplaatsen. $\mathbf{v}(\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \delta\mathbf{x})$ heet de *parallelle verplaatsing* van $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ naar $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$. De eerste term komt dus geheel voor rekening van de verandering van de richting van $\mathbf{v}$ zelf en de aanwezigheid van de tweede is een gevolg van het niet parallel zijn van de coördinaatvectoren. De eerste term is dus $\nabla_j v^i(\mathbf{x}) \delta x^j$ en de tweede is $-\Gamma^i_{jk} v^k \delta x^j$. Voor de parallelle verplaatsing van een contravariant vectorveld van $\mathbf{x}$ naar een infinitesimaal dichtbij gelegen punt $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ geldt dus

$$v^i(\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = v^i(\mathbf{x}) - \Gamma^i_{jk} v^j(\mathbf{x}) \delta x^k.$$

De Christoffelsymbolen maken het dus mogelijk de waarde van de componenten van een vectorveld in verschillende punten met elkaar te vergelijken. We noemen de Γ^k_{ij} ook wel de componenten van de *affiene connectie.* De connectie verbindt a.h.w. de componenten van vectoren, resp. tensoren t.o.v. de coördinatenbases in verschillende punten.

7.3. Divergentie, rotatie en Laplaciaan in willekeurige coördinaten.

Laat $U \subset \mathbf{R}^n$ een open deelverzameling zijn met reguliere coördinaten $y^1, \ldots, y^n$. ($x^1, \ldots, x^n$ zijn weer de Cartesische coördinaten t.o.v. de standaardbasis). Laat $\mathbf{v} : U \to \mathbf{R}^n$ een vectorveld zijn. We nemen aan dat $\mathbf{v}$ differentieerbaar is, d.w.z. als $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = v^i(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x^i}$, dan zijn $v^i(\mathbf{x})$ differentieerbaar voor $i = 1, \ldots, n$. In termen van Cartesische coördinaten zijn de divergentie van $\mathbf{v}$ en - in het geval dat $n = 3$ - de rotatie van $\mathbf{v}$ een scalair resp. een tensorveld gegeven door resp. div $\mathbf{v} = \partial_i v^i$ en $(\text{curl } \mathbf{v})^k = \epsilon^{ijk}\partial_i v_j$, waarbij $\epsilon^{ijk} = \epsilon_{ijk}$ en $v_i = v^i$. We proberen uitdrukkingen te vinden voor div $\mathbf{v}$ en curl $\mathbf{v}$ in termen van algemene coördinaten $y^1, \ldots, y^n$. We schrijven v^i voor de i-e component van $\mathbf{v}$ t.o.v. de betreffende coördinaten en evenzo ∂_i voor als $\frac{\partial}{\partial x^i}$ als voor $\frac{\partial}{\partial y^i}$ (uit de context blijkt hopelijk steeds welke bedoeld wordt).

De rotatie. In het geval van algemene coördinaten is zowel ϵ^{ijk} als $\partial_i v_j$ geen tensor. Uit de vorige paragraaf zien we echter dat $\partial_i v_j - \partial_j v_i$ een covariante tensor van rang 2 is. We proberen hieruit een contravariante vector te maken. Hiertoe zoeken we een contravariante tensor van rang 3, die gelijk is aan ϵ^{ijk} in het geval dat de coördinaten Cartesisch zijn. Samentrekking met de tensor $\partial_i v_j - \partial_j v_i$ geeft dan het gewenste resultaat. We weten dat ϵ_{ijk} een tensordichtheid is en transformeert als $\epsilon_{ijk}\frac{\partial x'^i}{\partial x''^\ell}\frac{\partial x'^j}{\partial x''^m}\frac{\partial x'^k}{\partial x''^n} = \epsilon_{\ell mn} \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x''}\right)$. Analoog is ϵ^{ijk} een tensordichtheid die transformeert als $\epsilon^{ijk}\frac{\partial x''^\ell}{\partial x'^i}\frac{\partial x''^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x''^n}{\partial x'^k} = \epsilon^{\ell mn} \det\left(\frac{\partial x''}{\partial x'}\right)$. We zoeken nu een tensordichtheid van rang (0,0), die de extra factor van de Jacobiaan kan opheffen. Deze wordt gevonden in de determinant van de metrische tensor. Laat g de determinant van de matrix (g_{ij}) zijn. Onder de reguliere coördinatentransformatie $x'^i \to x''^i$ transformeert g als $g'' = g' \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x''}\right)^2$. Nu volgt dat $\sqrt{g}\epsilon_{ijk}$ en $\epsilon^{ijk}/\sqrt{g}$ een covariante, resp. contravariante pseudotensor van rang 3 zijn. Tenslotte is $\frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ijk}\partial_i(g_{j\ell}v^\ell)$ (de k-e component van) een covariante vector die in het geval van Cartesische coördinaten herkennen als curl $\mathbf{v}$. Merk op dat we symbolisch kunnen schrijven

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \tag{7.8}$$

waarbij $\mathbf{f}_j = \frac{\partial}{\partial y^j}$ en $v_i = g_{ij}v^j$ zijn de covariante componenten van $\mathbf{v}$.

De divergentie. T.a.v. Cartesische coördinaten is de divergentie van $\mathbf{v}$ gelijk aan $\partial_i v^i$. T.a.v. willekeurige coördinaten zoeken we een scalair veld dat samenvalt met $\partial_i v^i$ in het geval dat de coördinaten Cartesisch zijn. In de vorige paragraaf hebben we gezien dat $\partial_i v^j$ i.h.a. geen tensor is, maar wel is $\nabla_i v^j$ een tensor van rang (1,1). De juiste uitdrukking voor div $\mathbf{v}$ is dus $\nabla_i v^i$. We kunnen nog verder gaan en $\nabla_i v^i$ uitdrukken in termen van de gewone afgeleiden ∂_i. Immers is $\nabla_i v^i = \partial_i v^i + \Gamma^i_{ij}v^j$ en

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2}g^{ik}(-\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ik}) = \frac{1}{2}g^{ik}\partial_j g_{ik}.$$

Nu is verder $\partial_j g = (\partial_j g_{ik})g^{ik}g$ en dus is

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_j\sqrt{g} = \frac{1}{2g}\partial_j g = \frac{1}{2}g^{ik}\partial_j g_{ik} = \Gamma^i_{ij}.$$

Conclusie:

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_j \left(\sqrt{g} v^j \right). \tag{7.9}$$

De Laplaciaan. Zij $f : U \to \mathbf{R}$ een tweemaal differentieerbaar scalair veld. De Laplaciaan van f is gedefinieerd als $\Delta f = \text{div grad } f$. In termen van Cartesische coördinaten is dit $\partial_i \partial^i f$ waarbij $\partial^i = \partial_i$. M.b.v. de boven afgeleide uitdrukkingen voor gradiënt en divergentie vinden we in termen van algemene coördinaten:

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \left(\sqrt{g} g^{ij} \partial_j f \right). \tag{7.10}$$

Deze algemenere vorm van de Laplaciaan heet ook wel de *Laplace-Beltrami operator*.

Voorbeeld: *poolcoördinaten in* E_2. Laat $D \subset E_2$ een open cirkelschijf zijn die de oorsprong niet bevat. Laat $\mathbf{v} : D \to \mathbf{R}^2$ een tweemaal differentieerbaar scalair veld en $f : D \to \mathbf{R}$ een eenmaal differentieerbaar vectorveld zijn. Dan is

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \text{ div } \mathbf{v} = \frac{1}{r} \partial_j (r v^j) = \partial_r v^r + \frac{v^r}{r} + \partial_\phi v^\phi$$

en

$$\Delta f = \frac{1}{r} \partial_j (r g^{jj} \partial_j f) = \frac{1}{r} \partial_\phi \left(\frac{1}{r} \partial_\phi f \right) + \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r f) = \partial_r \partial_r f + \frac{1}{r} \partial_r f + \frac{1}{r^2} \partial_\phi \partial_\phi f.$$

§7.4. Differentieerbare variëteiten.

Coördinatenstelsels, de metrische tensor en de affiene connectie zijn de gereedschappen die we kunnen gebruiken om de overstap te maken naar meer algemene "ruimten" dan de Euclidische. Een voorbeeld is het oppervlak van een bol in $\mathbf{R}^3$, zoals de eenheidsbol $x^i x_i = 1$. Aan een punt op de bol kunnen we twee coördinaten toekennen (zoals bolcoördinaten θ, ϕ) en in elk punt (m.u.v. de noord- en zuidpool) geeft dit een stelsel coördinaatvectoren $\partial_\theta, \partial_\phi$ die gedefinieerd zijn in het raakvlak aan de bol in het betreffende punt. Lokaal ziet de bol er dan uit als een deel van de Euclidische ruimte E_2 maar globaal heeft de bol andere eigenschappen.
Een dergelijke ruimte, die er lokaal als een Euclidische ruimte uitziet, heet een *differentieerbare variëteit.* Een ietwat grove definitie is de volgende:

Definitie: Een *differentieerbare variëteit* is een verzameling M zodanig dat M overdekt kan worden met open verzamelingen U_α die eruit zien als open deelverzamelingen van $\mathbf{R}^n$. n heet dan de dimensie van M.

We zullen iets specifieker ingaan op deze definitie. Voor elke deelverzameling U_α geldt dat deze *homeomorf* is met een open deelverzameling van R^n, d.w.z. er is voor elke U_α een continue, bijectieve afbeelding $\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ waarbij V_α een open deelverzameling is van $\mathbf{R}^n$, en zodanig dat de inverse $\phi_\alpha^{-1} : V_\alpha \to U_\alpha$ ook continu is (zo'n afbeelding noemen we een *homeomorfisme*). Verder wordt geëist dat, als $U_\alpha \cap U_\beta$ niet leeg is, de overgangsfuncties $\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha : \phi_\alpha^{-1}(V_\alpha) \to \phi_\beta^{-1}(V_\beta)$ oneindig vaak differentieerbaar zijn. Zo krijgt M een *differentieerbare structuur*. Het paar (U_α, ϕ_α) heet een *kaart* voor M, de collectie van alle kaarten heet een *atlas*.

De afbeeldingen ϕ_α leveren coördinaten voor de punten op U_α: Omdat $\phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbf{R}^n$, kunnen we aan een punt $P \in U_\alpha$ de coördinaten $(x^1, \ldots, x^n)$ van het punt $\phi_\alpha(P)$ toekennen. Als $P \in U_\alpha \cap U_\beta$, dan heeft P ook coördinaten $y^1, \ldots, y^n$ die afkomstig zijn van ϕ_β. Ga na dat de differentieerbare structuur ervoor zorgt dat de coördinatentransformatie $x^i \to y^i$ regulier is.

Voorbeelden. 1. E_n is een differentieerbare variëteit van dimensie n.

2. De bol $B = \{\|\mathbf{x}\| = 1\}$ in $\mathbf{R}^3$. Laat $N(0,0,1)$ en $Z(0,0,-1)$ zijn, en $U_1 = B - \{N\}$, $U_2 = B - \{Z\}$. De coördinaatfuncties $\phi_1 : U_1 \to \mathbf{R}^2, \phi_2 : U_2 \to \mathbf{R}^2$ verkrijgen we als volgt: laat V het vlak $x_3 = 0$ zijn. Trek de lijn door het punt $(x_1, x_2, 0) \in V$ en N resp. Z. Deze lijn heeft een snijpunt $P \in U_1$ resp. $Q \in U_2$ met de bol. Nu is $\phi_1(P) = (x^1, x^2)$ en $\phi_2(Q) = (x^1, x^2)$. M.a.w. (x_1, x_2) zijn de coördinaten van P resp. Q in U_1 resp. U_2. Ga nu na dat de functie $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbf{R}^2$ gegeven wordt door $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(x_1, x_2) = \left(\dfrac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \dfrac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right)$ en dat deze functie en zijn inverse beide C^∞ zijn. B is dus een differentieerbare variëteit van dimensie 2. De hier geschetste methode om de bol met uitzondering van een enkel punt op het vlak te projecteren, heet *stereografische projectie*. Stereografische projectie bezit een aantal "mooie" eigenschappen: het behoudt de hoek tussen twee krommen en beeldt een cirkel op de bol af op een cirkel of rechte in het vlak (en omgekeerd).

3. Een open deelverzameling $U \subset E_n$ is een differentieerbare variëteit, maar niet een gesloten deelverzameling G (behalve geheel E_n) omdat de punten op de rand geen omgeving in G hebben die homeomorf is met een open deelverzameling van $\mathbf{R}^n$.

Via de kaarten en de differentieerbare structuur kunnen we begippen uit de differentiaalmeetkunde van $\mathbf{R}^n$ overhevelen naar differentieerbare variëteiten. Een voorbeeld is de definitie van een differentieerbare functie op een differentieerbare variëteit (met differentieerbaar bedoelen we in deze context C^∞, dus oneindig vaak differentieerbaar).

Definitie: Laat M en N differentieerbare variëteiten zijn. Een functie $f : M \to N$ heet *differentieerbaar* als voor elke $P \in M$ de functie $\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}$ differentieerbaar is in $\phi_\alpha(P)$, waarbij $P \in U_\alpha$, $f(P) \in U'_\beta$ en (U_α, ϕ_α), resp. (U'_β, ψ_β) kaarten zijn voor M resp. N. De definitie is onafhankelijk van de keuze van de kaarten.

Als $f : M \to N$ een inverteerbare, differentieerbare functie is, zodanig dat de inverse ook differentieerbaar is, dan heet f een *diffeomorfisme.* M en N heten in dat geval diffeomorf. Als $P \in M$ en er een open verzameling $U \subset M$ is die P bevat zodanig dat $f : U \to f(U) \subset N$ een diffeomorfisme is, dan heet f een *lokaal diffeomorfisme.*

Definitie: Zij M een differentieerbare variëteit. Een deelverzameling $N \subset M$ die zelf een differentieerbare variëteit is, heet een *deelvariëteit* van M.

Voorbeelden: 1. Zij M een differentieerbare variëteit van dimensie n en $U \subset M$ open. Dan is U een deelvariëteit van M en $\dim(U) = n$.

2. Zij $f : M \to \mathbf{R}$ differentieerbaar zodat voor elke $P \in f^{-1}(0) = \{P \in M : f(P) = 0\}$ geldt dat $df(P) \neq 0$. Dan is het inverse beeld $f^{-1}(0)$ een deelvariëteit van dimensie $n - 1$. Een voorbeeld hiervan is $M = \mathbf{R}^n$ en $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 - 1$. Dan is $f^{-1}(0)$ de eenheidsbol S^{n-1} in $\mathbf{R}^n$.

Een ander begrip dat te generaliseren is, is dat van een raakvector en de raakruimte. We geven een iets andere maar equivalente definitie dan in het geval van de E_n:

Definitie: Zij M een differentieerbare variëteit van dimensie n en $P \in M$, en U_α een open omgeving van P in M. Een *raakvector* aan M in P is een afbeelding $X : C^\infty(U_\alpha) \to C^\infty(U_\alpha)$ (de verzameling differentieerbare functies op U_α) met de eigenschappen

a. $X(af + bg) = aX(f) + bX(g)$ voor $a, b \in \mathbf{R}$, $f, g \in C^\infty(U_\alpha)$. ($X$ is lineair.)
b. $X(fg)(P) = f(P)X(g) + g(P)X(f)$. ($X$ is een *derivatie.*)

De verzameling raakvectoren aan M in P vormt de *raakruimte* $T_P M$.

Merk op dat de definitie niet afhangt van de keuze van de kaart (U_α, ϕ_α). We tonen aan dat $T_P M$ een vectorruimte is van dimensie n. Laat $f \in C^\infty(U_\alpha)$ zijn. Laat $P, Q \in U_\alpha$ en laat

$(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ resp. $(x_0^1 + x^1, \ldots, x_0^n + x^n)$ de coördinaten van P resp. Q zijn. Definieer voor $t \in [0,1]$: $F(t) = f \circ \phi_\alpha^{-1}(x_0^1 + tx^1, \ldots, x_0^n + tx^n)$, dus $F(0) = f(P)$ en $F(1) = f(Q)$. Dan is

$$f(Q) - f(P) = F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(t)dt =$$

$$\sum_{i=1}^n x^i \int_0^1 \frac{\partial(f \circ \phi_\alpha^{-1})}{\partial x^i}(x_0^1 + tx^1, \ldots, x_0^n + tx^n)dt = \sum_{i=1}^n x^i g_i(x^1, \ldots, x^n).$$

Laat nu $X \in T_P(M)$. Dan is

$$X(f)(P) = \sum_{i=1}^n x^i X(g_i) + g_i(x^1, \ldots, x^n) X(x^i)\Big|_{x^i=0} = \sum_{i=1}^n g_i(0, \ldots, 0) X(x^i).$$

$X(f)$ is dus een lineaire combinatie van $X(x^i)$ met $i = 1, \ldots, n$. $T_P(M)$ wordt nu opgespannen door de raakvectoren $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \partial_n = \frac{\partial}{\partial x^n}$ waarbij $\partial_i(x^j) = \delta_i^j$.

De raakbundel TM is weer gedefinieerd als de vereniging $\bigcup_P T_P M$ en een *vectorveld* is is een afbeelding $X : M \to TM$ zodanig dat $X(P) \in T_P M$. Doorgaans eisen we dat een vectorveld differentieerbaar is, in de zin dat $X_P = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, waarbij de coëfficiënten X^i C^∞-functies zijn van de coördinaten van P.

Analoog aan het geval van E_n definiëren we p-vormen en tensorvelden op M of op open deelverzamelingen van M. Een *differentiaal(-p)vorm* is de gebruikelijke term voor een p-vormveld. Als $x^1, \ldots, x^n$ lokale coördinaten zijn rond $P \in M$, dan is $dx^1, \ldots, dx^n$ een basis van $T_P M^*$, de coraakruimte van 1-vormen, met $dx^i(\partial_j) = \delta_j^i$.

Laat $f : M \to \mathbf{R}$ een differentieerbare functie zijn op M. f is een scalair veld op M, dus een differentiaal-0-vorm. De *differentiaal* df van f is (als in §7.2) gedefinieerd als de differentiaal-1-vorm zodanig dat voor een raakvector X in $P \in M$ geldt dat $df(X) = X(f)$. Op een coördinaatomgeving U_α met coördinaten $x^1, \ldots, x^n$ is $df = \dfrac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

§7.5. Integratie van p-vormen.

We beschouwen eerst het geval van $\mathbf{R}^n$ met Cartesische coördinaten $x^1, \ldots, x^n$. De n-vorm $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ is overal ongelijk aan 0 (een n-vorm met deze eigenschap heet een *volumevorm* op E_n) en bepaalt een oriëntatie: een basis $\{X_1(\mathbf{x}), \ldots, X_n(\mathbf{x})\}$ van vectorvelden is positief, resp. negatief georiënteerd als $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n(X_1, \ldots, X_n)(\mathbf{x}) > 0$ resp. < 0 voor $\mathbf{x} \in E_n$. De integraal van een n-vorm $\omega = f(\mathbf{x})dx_1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ over $U \subset \mathbf{R}^n$ is gedefinieerd als

$$\int_U \omega = \int_U f(\mathbf{x}) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \int_U f(x^1, \ldots, x^n) dx^1 \ldots dx^n. \tag{7.11}$$

De integraal is goed gedefinieerd als U compact is, of als $f(\mathbf{x}) = 0$ buiten een compacte verzameling ($U \subset \mathbf{R}^n$ is compact dan en slechts dan als U gesloten en begrensd is). In het bijzonder geldt in het geval dat U het n-dimensionaal parallellepipedum is dat wordt opgespannen door de n vectoren $X_1, \ldots, X_n$ (waarbij $\{X_1, \ldots, X_n\}$ positieve oriëntatie heeft), dat

$$\int_U \omega = \omega(X_1, \ldots, X_n).$$

De waarde van de integaal is gelijk aan het volume van het parallellepipedum U.

Beschouw nu een coördinatentransformatie $x^i \to y^i$. De n-vorm ω in termen van de nieuwe coördinaten is gelijk aan

$$\omega = \tilde{f}(y^1, \ldots, y^n)\epsilon_{i_1 \ldots i_n} \frac{\partial x^1}{\partial y^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial y^{i_n}} dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n = \tilde{f}(y^1, \ldots, y^n) \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right| dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n \quad (7.12)$$

waarbij de factor $\left|\frac{\partial x}{\partial y}\right|$ staat voor de determinant van de Jacobiaan van de coördinatentransformatie. We zien dus dat deze op natuurlijke wijze bij een coördinatentransformatie optreedt in de integraal. Het is dus natuurlijk om n-vormen te integreren. Om dit te generaliseren naar willekeurige differentieerbare variëteiten voeren we eerst nog wat nieuwe begrippen in.

Definitie: Laat M, N differentieerbare variëteiten zijn en $f : M \to N$ een differentieerbare functie. Zij $P \in M$. De *push-forward* (of *raakafbeelding* van f is de (lineaire) afbeelding $f_* : T_P M \to T_{f(P)} N$ zodanig dat voor $g : N \to \mathbf{R}$ een differentieerbare functie en $X \in T_P M$ geldt dat

$$f_*(X)(g) \circ f = X(g \circ f).$$

Laat nu ω een covariante tensor zijn in $(T_{f(P)}N^*)^{\otimes k}$. Dan is de *pull-back* $f^*\omega$ de tensor in $(T_P M^*)^{\otimes k}$ gedefinieerd door

$$f^*\omega(X_1, \ldots, X_p) = \omega(f_* X_1, \ldots, f_* X_p).$$

Ga na dat als $x^1, \ldots, x^n$ en $y^1, \ldots, y^n$ lokale coördinaten rond P, resp. $f(P)$ op M resp. N zijn, dan is voor $X(P) = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ een raakvector in P,

$$f_*(X)(f(P)) = X^i \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} = X(f^j) \frac{\partial}{\partial y^j}. \quad (7.13)$$

Verder, als $\dim(M) = \dim(N)$ en $\omega = g(\mathbf{y}) dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$ een differentiaal-n-vorm is in een omgeving van $f(P)$, dan is

$$f^*\omega(\mathbf{x}) = (g \circ f)(\mathbf{x}) \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n. \quad (7.13')$$

Lemma 7.1: Laat L, M, N differentieerbare variëteiten zijn en $\phi : L \to M, \psi : M \to N$ differentieerbare afbeeldingen. Dan geldt voor de push-forward en de pull-back

$$(\phi \circ \psi)_* = \phi_* \circ \psi_*, \qquad (\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*.$$

Bewijs: Probeer dit zelf.

Zij nu M een differentieerbare variëteit van dimensie n en ω een n-vorm op M. Laat (U_α, ϕ_α) een kaart zijn met $x^1, \ldots, x^n$ lokale coördinaten. We nemen aan dat $\omega = 0$ buiten U_α, dus $\omega(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ voor $\mathbf{x} \in U_\alpha$ en $\omega(P) = 0$ als $P \notin U_\alpha$. Dan is de integraal van ω over M gedefinieerd als

$$\int_M \omega = \int_{U_\alpha} \omega = \int_{\phi_\alpha(U_\alpha)} (\phi_\alpha^{-1})^* \omega. \quad (7.14)$$

De laatste integraal is gedefinieerd over een open deelverzameling van $\mathbf{R}^n$. Vergelijk nu deze definitie met (7.12). In het geval dat de punten in M waar ω niet nul is, niet binnen één enkele coördinaatomgeving U_α liggen, moet op de juiste wijze gesommeerd worden. Verder moet de variëteit M als geheel *oriënteerbaar* zijn, d.w.z. er bestaat een volumevorm ω op M die overal ongelijk is aan nul, om de integraal $\int_M f\omega$ over geheel M te kunnen definiëren. Niet alle differentieerbare variëteiten zijn orienteerbaar. We gaan hier verder niet op in.

Een criterium voor deelvariëteiten. M.b.v. de push-forward van een differentieerbare afbeelding kan voorbeeld 2 in §7.4 worden gegeneraliseerd: laat M, N differentieerbare variëteiten zijn van dimensie m, resp. n en $m \geq n$. Zij $f : M \to N$ een differentieerbare afbeelding zodanig dat in elk punt P in het inverse beeld $f^{-1}(Q)$ van een punt $Q \in N$ geldt dat de (lineaire) afbeelding $f_* : T_P M \to T_Q N$ (maximale) rang n heeft (m.a.w. f_* is surjectief). Dan is $R = f^{-1}(Q)$ een deelvariëteit van M van dimensie $m - n$. Verder is $\ker(f_*) = T_P R$.

Voorbeeld: Zij $M = \mathbf{R}^3$ en zij $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ gegeven door $f(x^1, x^2, x^3) = ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1, x^3)$ (in Cartesische coördinaten t.o.v. de standaardbases). Het inverse beeld $C = f^{-1}((0,0))$ is een cirkel. De matrix van de lineaire afbeelding f_* wordt gegeven door $\begin{pmatrix} 2x^1 & 2x^2 & 2x^3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Voor een punt $(x^1, x^2, x^3) \in C$ is $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1$ en dus is de rang van de matrix overal gelijk aan 2. C is dus een deelvariëteit van $\mathbf{R}^3$ van dimensie $3 - 2 = 1$.

§7.6. Uitwendige afgeleide van een p-vorm. Lemma van Poincaré en stelling van Stokes.

In §7.4 is de differentiaal df van een scalair veld f gedefinieerd. df is een differentiaal-1-vorm. We kunnen de differentiaal ook voor differentiaal-p-vormen ω definiëren, en krijgen dan een $p+1$-vorm $d\omega$. $d\omega$ heet de *uitwendige afgeleide* van ω.

Definitie: De uitwendige afgeleide van een differentiaalvorm op een differentieerbare variëteit M is een operatie $d : \bigwedge^p M \to \bigwedge^{p+1} M$ voor $p = 0, 1, \ldots$ met de eigenschappen (ω, η zijn een differentiaal-p- resp. q-vorm op M)

i. $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$ als $p = q$.
ii. $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta$.
iii. $d^2\omega = dd\omega = 0$.
iv. Voor een differentieerbare functie $f : M \to \mathbf{R}$ is df gedefinieerd door $df = \dfrac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

Deze definitie legt de d-operatie geheel vast: hieruit volgt voor een p-vorm $\omega = a_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$ op een coördinaatomgeving U_α:

$$d\omega = \frac{\partial a_{i_1 \ldots i_p}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}. \tag{7.15}$$

en ook volgt dat $d^2\omega = dd\omega = 0$.

Voorbeelden: 1. Laat $M = \mathbf{R}^3$ en $\omega = a_i dx^i$ een 1-vorm. Dan is

$$d\omega = \left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3}\right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x^3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^1}\right) dx^3 \wedge dx^1,$$

een 2-vorm waarvan de coëfficiënten gelijk zijn aan die van curl $\mathbf{a}$.

2. Laat $M = E_3$ en $\omega = b^1 dx^2 \wedge dx^3 + b^2 dx^3 \wedge dx^1 + b^3 dx^3 \wedge dx^1$, dan is

$$d\omega = \left(\frac{\partial b^1}{dx^1} + \frac{\partial b^2}{dx^2} + \frac{\partial b^3}{dx^3}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = (\text{div } \mathbf{b}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

3. Zij ω een 1-vorm op een differentieerbare variëteit M en X, Y vectorvelden. Dan is

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]). \tag{7.16}$$

(Ga dit zelf na.)

We noemen in dit verband twee resultaten:

Propositie 7.2: *(Lemma van Poincaré).* Als voor een p-vorm ω geldt dat $d\omega = 0$ op een samentrekbaar gebied $U \subset M$, dan is $\omega = d\eta$ voor zekere $p-1$-vorm η op U. (Een gebied U heet *samentrekbaar* als er een punt $x_0 \in U$ is en een continue functie $F : U \times [0,1]$ zodanig dat $F(x,0) = x, F(x,1) = x_0, F(x_0,t) = x_0$ voor $x \in U$, $t \in [0,1]$)

Voor het geval dat $M = \mathbf{R}^3$, $\omega = a_1 dx^1 + a_2 dx^2 + a_3 dx^3$ betekent $d\omega = 0$ dat curl $\mathbf{a}$=0. Volgens het lemma van Poincaré is dan lokaal $\omega = df$ voor zekere differentieerbare functie f, m.a.w. de vector $\mathbf{a}$ is de gradiënt van een functie f. Een vectorveld waarvan de rotatie nul is, is dus lokaal een gradiënt. Analoog, in het geval dat $\omega = b^1 dx^2 \wedge dx^3 + b^2 dx^3 \wedge dx^1 + b^3 dx^3 \wedge dx^1$, impliceert $d\omega = 0$ dat div $\mathbf{b}$=0. Volgens het lemma van Poincaré is dan lokaal $\omega = d\eta$ voor zekere 1-vorm η, m.a.w. $\mathbf{b}$= curl $\mathbf{a}$ voor zeker vectorveld $\mathbf{a}$. Een vectorveld waarvan de divergentie nul is, is dus lokaal de rotatie van een ander vectorveld.

Laat $U \subset \mathbf{R}^3$ een samentrekbaar gebied zijn en $\mathbf{B}$ een magnetisch veld op U. UIt de Maxwell-vergelijkingen volgt dat $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Dus bestaat er op U een vectorveld $\mathbf{A}$ zodanig dat $\nabla \times \mathbf{A} = B$. Het veld $\mathbf{A}$ heet de *vectorpotentiaal.* Merk op dat $\mathbf{A}$ in feite een covariant vectorveld is.

Definitie: Een deelverzameling U van een differentieerbare variëteit M heet *compact* als bij iedere overdekking van U door open deelverzamelingen $U \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$ er eindig veel V_α (zeg $V_1, \ldots, V_N$) bestaan zodanig dat $U \subset \bigcup_{i=1}^N V_i$. Indien M een Euclisiche ruimte is, is U compact dan en slechts dan als U gesloten en begrensd is (stelling van Heine-Borel)); een functie of p-vorm ω op M heeft *compacte drager* als $\omega = 0$ buiten een compacte deelverzameling $U \subset M$.

Als M dimensie N heeft en $U \subset M$ een N-dimensionale georiënteerde deelvariëteit is met een (gladde) $N-1$-dimensionale rand ∂U, dan kunnen we op ∂U op de volgende wijze een oriëntatie leggen. Kies in een punt $Q \in \partial U$ een basis $\{X_1, \ldots, X_{N-1}\}$ van de raakruimte $T_Q \partial U$. Laat $Y \in T_Q M$ lineair onafhankelijk zijn van $X_1, \ldots, X_{N-1}$. Door zonodig het teken van Y aan te passen kunnen we aannemen dat Y naar buiten (en $-Y$ naar binnen) wijst. Nu is het stelsel $\{X_1, \ldots, X_{N-1}\}$ positief (resp. negatief) georiënteerd op ∂U als op U het stelsel $\{Y, X_1, \ldots, X_{N-1}\}$ positieve (resp. negatieve) oriëntatie heeft. Deze oriëntatie op ∂U heet de *geïnduceerde oriëntatie.*

Propositie 7.3 *(Stelling van Stokes):* Zij M een differentieerbare variëteit met dimensie N en zij U een georiënteerde N-dimensionale deelvariëteit van een differentieerbare variëteit M met dimensie N met (stuksgewijs) gladde $N-1$-dimensionale rand ∂U met de geïnduceerde oriëntatie. Zij ω een $(N-1)$-vorm met *compacte drager* op U. Dan is

$$\int_U d\omega = \int_{\partial U} \omega.$$

Voorbeelden: 1. Zij L een gladde kromme met begin- en eindpunt α resp. β in $\mathbf{R}^n$. f is een differentieerbare functie op L. De lijnintegraal van de gradient van f over L is gelijk aan $\int_L df$. Volgens de stelling van Stokes is dit gelijk aan $\int_{\partial L} f = f(\beta) - f(\alpha)$.

2. Zij $B \subset \mathbf{R}^3$ een gesloten en begrensde verzameling met als rand het gladde oppervlak ∂B. Zij $\mathbf{v}$ een differentieerbaar vectorveld op B met (Cartesische) componenten v^i. De oppervlakte-integraal van $\mathbf{v}$ over ∂B is gelijk aan

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot d\sigma = \int_{\partial B} v^1 dx^2 \wedge dx^3 + v^2 dx^3 \wedge dx^1 + v^2 dx^3 \wedge dx^1 = \int_B \nabla \cdot \mathbf{v} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Dit resulaat staat bekend als de stelling van Gauss. De klassieke stellingen van Green en Stokes voor lijnintegralen zijn eveneens speciale gevallen van de stelling van Stokes voor p-vormen.

§7.7. De Lie-afgeleide.

Zij X een (C^∞-)vectorveld op een differentieerbare variëteit M. Door het vectorveld worden stromingslijnen bepaald die in elk punt raken aan het vectorveld X. Laat P een punt in M zijn. De *stroming* van X door P is een afbeelding $f_P : (-\epsilon, \epsilon) \times M \to M$ zodanig dat

$$f(0,P) = P, \qquad \frac{d}{dt} f(t,P) = X(f(t,P)). \tag{7.17}$$

In het algemeen is $f(t,P)$ niet voor alle $t \in \mathbf{R}$ gedefinieerd. In plaats van $f(t,P)$ schrijven we meestal $f_t(P)$. Verder schrijven we zowel $X(P)$ als X_P voor de waarde van het vectorveld X in P.
Voorbeeld: Laat $M = \mathbf{R}^2 - \{O\}$ en P het punt met coördinaten (a,b). $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$. De stroming van X door P is $f_t(P) = (a+t, b)$. Als $b = 0$ dan zien we dat $f_t(P)$ niet voor alle t gedefinieerd is.

De Lie-afgeleide van het vectorveld X geeft aan in hoeverre een vector- of tensorveld met het vectorveld meeverandert. Voor een differentieerbare functie $g : M \to \mathbf{R}$ is de Lie-afgeleide $L_X g$ in P gedefinieerd als

$$L_X g(P) = X(g)(P) = \lim_{t\to 0} \frac{(g \circ f_t)(P) - g(P)}{t}; \tag{7.18}$$

dit kunnen we ook schrijven als

$$L_X g(P) = \frac{d}{dt} f_t^* g(P)\Big|_{t=0}. \tag{7.18$'$}$$

Laat nu Y een vectorveld op M zijn. Vergelijken van Y_P met $Y_{f_t(P)}$ is niet zinnig omdat de componenten van Y in twee verschillende punten afhangen van de coördinaten. Wel kunnen we $(f_t)_* Y_P$ met $Y_{f_t(P)}$ vergelijken. Dit geeft de Lie-afgeleide van Y naar X:

$$L_X Y(P) = \lim_{t\to 0} \frac{Y_{f_t(P)} - (f_t)_* Y_P}{t} = \frac{d}{dt} (f_{-t})_* Y_{f_t(P)}\Big|_{t=0}. \tag{7.19}$$

We drukken de componenten van $L_X Y$ uit in de componenten van X, Y t.o.v. een gegeven basis. Uit (7.19) volgt dat

$$L_X Y = \lim_{t\to 0} \frac{Y_{f_t(P)} - Y_P}{t} + \frac{Y_P - (f_t)_* Y_P}{t}.$$

De i-e component van de eerste term in het rechterlid is gelijk aan $X_P(Y^i)$ (vergelijk (7.18)). Verder is de i-e component van de tweede term (vergelijk (7.13))

$$\lim_{t\to 0} \frac{Y_P^i - ((f_t)_* Y_P)^i}{t} = -\lim_{t\to 0} \frac{Y_P(f_t^i) - Y_P^i}{t} = -Y_P(X^i).$$

We hebben dus aangetoond

$$L_X(Y)^i = X(Y^i) - Y(X^i) =: [X,Y]^i.$$

ofwel $L_X Y = [X,Y]$.

Laat nu ω een differentiaal-1-vorm zijn (dus een covectorveld) op M, en Y een vectorveld. We schrijven X_P voor $X(P)$ etc. Dan is

$$\lim_{t\to 0}\frac{\omega_{f_t(P)}(Y_{f_t(P)}) - \omega_P(Y_P)}{t} = \lim_{t\to 0}\omega_{f_t(P)}\left(\frac{Y_{f_t(P)} - (f_t)_* Y_P}{t}\right) + \frac{f_t^*\omega_{f_t(P)} - \omega_P}{t}(Y_P).$$

Het linkerlid is gelijk aan $X(\omega(Y))(P) = L_X(\omega(Y))(P)$. De eerste term van het rechterlid is $\omega(L_X Y)(P)$; de tweede term is gelijk aan $\frac{d}{dt}f_t^*\omega_{f_t(P)}(Y_P)\Big|_{t=0}$. We definiëren nu

$$L_X\omega(P) = \lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}f_t^*\omega_{f_t(P)}\Big|_{t=0}. \tag{7.20}$$

Dan geldt

$$\omega(L_X Y) + (L_X\omega)(Y) = L_X(\omega(Y)) \tag{7.21}$$

en $L_X\omega$ is weer een covectorveld. In componenten geeft dit

$$(L_X\omega)_i = X^j\partial_j\omega_i + \omega_j\partial_i X^j. \tag{7.21$'$}$$

Ga ook na dat $L_X dx^j = dX^j$.

Nu definiëren we de Lie-afgeleide van een tensorproduct $S\otimes T$ van (co)vectorvelden S en T m.b.v. de regel van Leibnitz:

$$L_X(S\otimes T) = L_X S\otimes T + S\otimes L_X T. \tag{7.22}$$

Dus geldt ook

$$L_X(S\wedge T) = L_X S\wedge T + S\wedge L_X T. \tag{7.22$'$}$$

De Lie-afgeleide $L_X Z$ van een tensorveld Z van rang (r,s) is weer een tensorveld van rang (r,s). Nu geldt voor twee vectorvelden X en Y en $a,b\in\mathbf{R}$:

$$L_{aX+bY}Z = aL_X Z + bL_Y Z. \tag{7.23}$$

Opmerking: Voor de commutator $[X,Y]$ van twee raakvectoren $X,Y\in T_P M$ geldt dat, als f een differentieerbare functie is:

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Het is nu niet moeilijk om m.b.v. de in §7.4 gegeven definitie van een raakvector na te gaan, dat $[X,Y]\in T_P M$.

Propositie 7.4: Laten M,N differentieerbare variëteiten zijn en $\phi: M\to N$ differentieerbaar. Zij $P\in M$ en $X,Y\in T_P M$. Dan is

$$\phi_*[X,Y] = [\phi_* X, \phi_* Y]. \tag{7.24}$$

Bewijs: Opgave.

Inwendig product van een vector met een p-vorm. Zij V een vectorruimte over een lichaam K met duale V^*. Er bestaat een *inproduct* $V\times V^*\to K$ gegeven door $(X,\omega)=\omega(X)$. Deze constructie kunnen we generaliseren naar het geval dat ω een p-vorm is:

Definitie: Zij $X \in V$ en $\omega \in \Lambda^p(V)$. Dan is het *inwendig product* $i_X\omega$ de $(p-1)$-vorm gedefinieerd door

$$i_X\omega(Y_2, \ldots, Y_n) = \omega(X, Y_2, \ldots, Y_n) \tag{7.25}$$

waarbij $Y_2, \ldots, Y_n \in V$.

Het is niet moeilijk om aan te tonen dat als α een p-vorm is en β een q-vorm, dan is

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (i_X\beta). \tag{7.26}$$

Propositie 7.5: Zij X een vectorveld op een variëteit M en ω een differentiaal-p-vorm op M. Dan is

$$L_X\omega = i_X(d\omega) + d(i_X\omega) \tag{7.27}$$

ofwel

$$L_X = i_X \circ d + d \circ i_X. \tag{7.28}$$

Bewijs: Voor f een scalair veld is $i_X f = 0$ en $L_X f = X(f) = df(X) = i_X(df)$.
Voor ω een 1-vorm en Y een vectorveld is volgens (7.16) en (7.21)

$$i_X(d\omega)(Y) + d(i_X(\omega))(Y) = d\omega(X, Y) + Y(\omega(X)) = X(\omega(Y)) - \omega([X, Y]) = (L_X\omega)(Y).$$

Tenslotte geldt voor α een p-vorm en β een q-vorm volgens §7.6 (definitie, (ii))

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta. \tag{7.29}$$

Uit (7.29) en (7.26) volgt

$$(d \circ i_X + i_X \circ d)(\alpha \wedge \beta) = (d \circ i_X + i_X \circ d)\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge (d \circ i_X + i_X \circ d)\beta.$$

Tenslotte volgt uit (7.22) dat

$$L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge L_X\beta.$$

Aangezien (7.28) geldt voor 0-vormen en 1-vormen en L_X en $d \circ i_X + i_X \circ d$ beide voldoen aan de regel van Leibnitz voor het wigproduct, volgt de bewering. $\diamond$

Toepassing: tijdsafgeleiden van integralen. Beschouw in $\mathbf{R}^n$ een stromingsveld $\mathbf{v}(\mathbf{x})$. Laat V op $t = 0$ een p-dimensionale deelvariëteit zijn, die meebeweegt met de stroming f_t van het veld $\mathbf{v}$. Een punt $P \in V$ bevindt zich op tijdstip t op het punt $f_t(P)$. $V(t)$ bestaat uit de punten $f_t(P)$ met $P \in V$, dus $V(t) = f_t(V)$. Laat nu ω een differentiaal-p-vorm zijn ($p > 0$) gedefinieerd op V. Dan geldt:

$$\int_{V(t)} \omega = \int_V f_t^*\omega$$

en dus is de tijdsafgeleide

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \omega \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int_V f_t^*\omega \Big|_{t=0} = \int_V L_{\mathbf{v}}\omega. \tag{7.30}$$

Als ω ook van t afhangt, dan geldt

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \omega \Big|_{t=0} = \int_V \frac{\partial \omega}{\partial t} + L_v\omega. \tag{7.31}$$

Voorbeelden: 1. Zij f een differentieerbare functie op $\mathbf{R}^n \times (-\epsilon, \epsilon)$, en $\mathbf{v}, V$ als boven. Verder is $\omega(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, t)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ en

$$L_{\mathbf{v}}\omega(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(f)(\mathbf{x}, t)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n + f(\mathbf{x}, t)dv^1 \wedge \ldots \wedge dx^n + \ldots + f(\mathbf{x}, t)dx^1 \wedge \ldots \wedge dv^n =$$

$$\left(v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + f\frac{\partial v^i}{\partial x^i}\right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \nabla \cdot (f\mathbf{v})dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Dus is

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \int_{V(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (f\mathbf{v})(\mathbf{x}, t)\right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

2. Laat $\omega = a_j dx^j =: \mathbf{a} \cdot ds$ een covectorveld zijn op $\mathbf{R}^3$, en $L(t)$ een gladde kromme, meebewegend met het snelheidsveld. Dan is

$$L_{\mathbf{v}}\omega = \mathbf{v}(a_i)dx^i + a_i dv^i = ((\nabla \times \mathbf{a}) \times \mathbf{v} + \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})) \cdot ds$$

dus

$$\frac{d}{dt}\int_{L(t)} a_i dx^i = \int_{L(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{a}) \times \mathbf{v} + \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\right) \cdot ds.$$

In het geval dat $\mathbf{a} = \mathbf{v}$, en L een gesloten kromme is, dan heet $C(t) = \int_{L(t)} \mathbf{v} \cdot ds = \int_{L(t)} v_i dx^i$ de circulatie van het veld (over $L(t)$). Als v tijdsonafhankelijk is, is

$$\frac{dC}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{L(t)} \mathbf{v} \cdot ds = \int_{L(t)} \left((\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \nabla(\mathbf{v}^2)\right) \cdot ds = \int_{L(t)} (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} \cdot ds.$$

Als het snelheidsveld rotatievrij is, dus curl $\mathbf{v} = 0$, dan is $C(t)$ constant. Dit resulaat staat bekend als de stelling van Kelvin.

3. Laat ω de 2-vorm $\mathbf{b} \cdot d\sigma = b^1 dx^2 \wedge dx^3 + b^2 dx^3 \wedge dx^1 + b^3 dx^3 \wedge dx^1$ in $\mathbf{R}^3$ zijn. Dan is

$$L_{\mathbf{v}}\omega = (\nabla \times (\mathbf{b} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{b}) \cdot d\sigma.$$

Divergentie en flux van een vectorveld. Laat M een georiënteerde differentieerbare variëteit zijn met volumevorm ω; in termen van lokale coördinaten $x^1, \ldots, x^n$ is $\omega = f(x^1, \ldots, x^n)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Zij $X = X^i \partial_i$ een vectorveld op M. Dan is $i_X\omega$ een $(n-1)$-vorm op M. De *divergentie* van X is nu gedefinieerd als $d(i_X\omega) = L_X\omega$. In termen van lokale coördinaten is

$$L_X\omega = X(f)(\mathbf{x})dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n + f(\mathbf{x})L_X dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n + \ldots + f(\mathbf{x})dx^1 \wedge \ldots \wedge L_X dx^n =$$

$$= (f(\mathbf{x})\partial_i X^i + X(f))\omega \;=\; \mathrm{div}(X)\omega.$$

In het geval van $\mathbf{R}^n$ met Cartesische coördinaten en volumevorm $\omega = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ geeft dit $\mathrm{div}(X) = \dfrac{\partial X^j}{\partial x^j}$. Verder, als N een oriënteerbare $(n-1)$-dimensionale deelvariëteit is, dan is $\int_N i_X\omega$ de *flux* van het vectorveld X door N. Deze definitie komt overeen met de klassieke definitie in het geval dat N een (stuksgewijs) glad oriënteerbaar oppervlaktestuk in $\mathbf{R}^3$ is.

§7.8. Riemannse en pseudo-Riemannse variëteiten.

Op een differentieerbare variëteit M is a priori geen afstandsbegrip of een hoekbegrip gedefinieerd. Hiervoor is een extra structuur nodig, die we al hebben leren kennen in het geval van de Euclidische ruimte, nl. een metrische tensor. Dit is een symmetrisch covariant tensorveld g van rang 2, dus $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, waarbij g_{ij} C^∞-functies op M zijn. Van g eisen we verder dat deze niet-gedegenereerd is, d.w.z. als $g(P)(v, w) = 0$ voor $P \in M$, voor zekere vector v en alle vectoren w, volgt dat $v = 0$. Dit komt overeen met de eis dat de matrix (g_{ij}) inverteerbaar is. Als verder g positief-definiet is, d.w.z. $g(P)(v, v) > 0$ voor $P \in M$ en $v \neq 0$, dan definieert g in elke punt van M een inwendig product. M heet dan een Riemannse variëteit en g een Riemannse metriek. Dit is het geval voor de Euclidische ruimten E_n met $g = dx^i \otimes dx^i$ (sommatie over i) waarbij x^i Cartesische coördinaten zijn. Als g niet-gedegenereerd en indefiniet is, dan heet M een pseudo-Riemannse variëteit. Een voorbeeld is de *Minkowski-ruimte* uit de speciale relativiteitstheorie: als variëteit is deze gelijk aan de vierdimensionale Euclidische ruimte E_4 maar met de metriek $g = dx^4 \otimes dx^4 - dx^1 \otimes dx^1 - dx^2 \otimes dx^2 - dx^3 \otimes dx^3$. De coördinaat x^4 wordt als een tijdscoördinaat geïnterpreteerd. We zullen ons in dit hoofdstuk overigens beperken tot het geval van Riemannse variëteiten maar de meeste van de concepten zijn ook geldig in het pseudo-Riemannse geval. M.b.v. g kunnen we hoeken en lengten van raakvectoren definiëren: de vector $v \in T_P M$ heeft lengte $g_P(v, v)^{1/2}$ en de hoek θ tussen vectoren $v, w \in T_P M$ is gedefinieerd door $\cos\theta = \dfrac{g_P(v, w)}{\sqrt{g_P(v, v)}\sqrt{g_P(w, w)}}$. M.b.v. de metrische tensor kunnen we ook de lengte L_γ van een gladde kromme $\gamma : [a, b] \to M$ definiëren: laat daartoe eerst $M = \mathbf{R}^n$ zijn met Cartesische coördinaten $x^1, \ldots, x^n$. De coördinaten van $\gamma(t)$ zijn $(x^1(t), \ldots, x^n(t))$, waarbij $t \in [a, b]$ en de lengte van γ wordt dan gegeven door $\displaystyle\int_a^b \left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right| dt = \int_a^b \sqrt{\frac{dx^i}{dt}\frac{dx_i}{dt}} dt$. Laat nu $y^1, \ldots, y^n$ willekeurige reguliere coördinaten zijn. Dan wordt, volgens (7.4)

$$L_\gamma = \int_a^b \sqrt{\frac{dx^i}{dt}\frac{dx_i}{dt}} dt = \int_a^b \sqrt{\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{dy^j}{dt}\frac{dy^k}{dt}} dt = \int_a^b \sqrt{g_{jk}\frac{dy^j}{dt}\frac{dy^k}{dt}} dt. \tag{7.32}$$

Voor een Riemannse variëteit M is nu de lengte van een gladde kromme $\gamma : [a, b] \to M$ gedefinieerd als

$$L_\gamma = \int_a^b \sqrt{g_{jk}\frac{dy^j}{dt}\frac{dy^k}{dt}} dt \tag{7.33}$$

(waarbij we aannemen dat γ geheel in één enkele coördinaatomgeving U_α met coördinaten y^i ligt). Deze definitie hangt niet af van de keuze van de coördinaten.

Voorbeeld: De metrische tensor in bolcoördinaten (r, θ, ϕ) in $\mathbf{R}^3$ wordt gegeven door $g = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 \sin^2\theta d\phi \otimes d\phi$. Dit schrijft men meestal als $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$. Door $r = 1$ te kiezen beperken we ons tot de eenheidsbol B, een Riemannse deelvariëteit van $\mathbf{R}^3$ (of E_3) van dimensie 2. De metriek hierop wordt verkregen door de metriek op $\mathbf{R}^3$ tot B te beperken. Dit geeft $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Neem een breedtecirkel op B, gegeven door $\theta = \theta_0$ (is constant) en $0 \leq \phi \leq 2\pi$. De lengte hiervan is (neem $t = \phi$) $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin\theta_0| d\phi = 2\pi|\sin\theta_0|$.

Laat opnieuw $M = \mathbf{R}^n$ met Euclidische coördinaten x^i zijn. Het volume van een compacte verzameling G is $\displaystyle\int_G \omega$ waarbij $\omega = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ de volumevorm op M is. Voor willekurige (reguliere) coördinaten y^i is dit

$$\omega = \frac{\partial x^1}{\partial y^{j_1}} \dots \frac{\partial x^n}{\partial y^{j_n}} dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_n} = \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right| dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$$

waarbij $\left| \frac{\partial x}{\partial y} \right|$ de determinant is van de transformatiematrix $\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right)$. Als de coördinatentransformatie positieve determinant heeft, d.w.z. oriëntatiebehoudend is, dan is volgens §7.1 $\sqrt{g} = \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right|$ met g de determinant van de metrische tensor. Voor een georiëntieerde Riemannse variëteit M met coördinaten y^j wordt het volume $V(G)$ van een compacte verzameling $G \subset M$ dus gegeven door

$$V(G) = \int_G \sqrt{g(\mathbf{y})} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n. \tag{7.34}$$

Voorbeeld: Laat M de bol $\{\|\mathbf{x}\| = R\}$ met straal R in $\mathbf{R}^3$ zijn. Bolcoördinaten θ, ϕ zijn reguliere coördinaten op M (met uitzondering van een halve cirkel) en de metrische tensor is $R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2$. Dan is $\sqrt{g(\theta, \phi)} = R^2 \sin \theta$ en dus is

$$V(M) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 \sin \theta d\theta \wedge d\phi = V(M) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi R^2.$$

Opmerking: Op een Riemannse variëteit kunnen we, op dezelfde wijze als in §7.3, de gradiënt, de divergentie en de Laplaciaan definiëren. Deze laatste wordt in deze context als de Laplace-Beltrami-operator aangeduid. Merk op dat de divergentie van een vectorveld X ook op een niet-Riemannse (maar oriënteerbare) variëteit kan worden gedefinieerd als $L_X \omega$ waarbij ω een volumevorm is (vergelijk §7.7, voorbeeld 1).

Isometrieën en Killing-vectorvelden.

Laat M, N twee Riemannse variëteiten zijn met metrische tensoren g_M resp. g_N.

Definitie: De differentieerbare afbeelding $f : M \to N$ heet een *isometrie* als $f^* g_N = g_M$.

Voor een isometrie geldt dus $g_M(X, Y) = g_N(f_* X, f_* Y)$ voor twee raakvectoren $X, Y \in T_P M$ ($P \in M$).

Definitie: Een vectorveld X op de Riemannse variëteit M met metrische tensor g heet een *Killing-vectorveld* als $L_X g = 0$. Dit houdt in, dat als voor vectorvelden Y, Z geldt dat $L_X Y = L_X Z = 0$, dan is $g(f_{*t} Y, f_{*t} Z) = g(Y, Z)$ waarbij f_t de stroming van het vectorveld X is.

Uit (7.23) volgt dat de Killing-vectorvelden op M een vectorruimte vormen. Er geldt nog meer, nl. uit $L_{[X,Y]} = L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X$ volgt dat als X, Y Killing-vectorvelden zijn, dan is $[X, Y]$ een Killing-vectorveld. We schrijven de eis dat $L_X g = 0$ in termen van lokale coördinaten. Door te gebruiken dat $(L_X g)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g(L_X Y, Z) - g(Y, L_X Z)$, vinden we

$$0 = (L_X g)_{ij} = X^k \partial_k g_{ij} + g_{kj} \partial_i X^k + g_{ik} \partial_j X^k. \tag{7.35}$$

Voorbeeld. Laat $M = E_2$. We bepalen alle Killing-vectorvelden op M. We gebruiken Cartesische coördinaten, dus $g_{ij} = \delta_{ij}$. (7.32) geeft dan

$$\partial_i X^j + \partial_j X^i = 0,$$

dus de 3 vergelijkingen

$$\frac{\partial X^1}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial X^2}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial X^1}{\partial x^2} = -\frac{\partial X^2}{\partial x^1}.$$

De eerste twee vergelijkingen impliceren dat X^1 alleen van x^2 afhangt en X^2 alleen van x^1. Uit de derde vergelijking volgt dan dat $(X^1)'(x^2) = -(X^2)'(x^1) = a$ dus

$$X^1 = ax^2 + b, \quad X^2 = -ax^1 + c$$

met a, b, c constant. Er zijn dus drie lineair onafhankelijke Killingvectorvelden op E_2, nl.

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x^1} - x^1\frac{\partial}{\partial x^2}.$$

Als we naar de stromingen van de drie Killing-vectorvelden kijken, zien we dat X_1, X_2 translaties voortbrengen, en X_3 een rotatie (om O). (Een rotatie om een willekeurig ander punt wordt voortgebracht door een lineaire combinatie van X_1, X_2, X_3.)

Uit het bovenstaande voorbeeld zien we dat Killing-vectorvelden voortbrengers zijn van symmetrieën van de ruimte. Killing-vectorvelden spelen hierdoor o.a. in de algemene relativiteitstheorie een belangrijke rol. Als we voor M de Minkowskiruimte nemen, vinden we 10 lineair onafhankelijke Killing-vectorvelden: vier brengen translaties voort, een in de tijdsrichting, drie andere in de drie ruimtelijke richtingen, verder zijn er 3 rotaties (bijv. om de x^1-, x^2- en x^3-as) en er zijn 3 Lorentz-"boosts" (in de drie richtingen).

§7.9. Connecties en geodeten op een Riemannse variëteit.

Zoals we in het geval van de Euclidische ruimten hebben gezien zijn voor willekeurige coördinatenstelsels de partiële afgeleiden $\partial_i v^j$ van de componenten van een vectorveld niet de componenten van een tensor. Wel is dit het geval als we ons beperken tot Cartesische coördinaten en alleen translaties en rotaties, die Cartesische coördinaten in Cartesische coördinaten overvoeren. Als we op E_n uitgaan van Cartesische coördinaten en op $\partial_i v^j$ een willekeurige coördinatentransformatie uitvoeren dan krijgen we de componenten $\nabla_i v^j = \partial_i v^j + \Gamma^j_{ik} v^k$ van een tensorveld ∇v, de *covariante afgeleide* van het vectorveld v. Een meetkundige interpretatie van $\nabla v = 0$ is dat het vectorveld overal parallel loopt. We onderzoeken nu hoe we de concepten van parallelliteit en covariante afgeleide naar een willekurige Riemannse variëteit kunnen generaliseren. We introduceren eerst het begrip *parallelle verplaatsing* van een vectorveld. Zij M een Riemannse variëteit van dimensie n. Hoewel M globaal niet Euclidisch is, ziet M er wel lokaal, in de omgeving van een punt $P \in M$, Euclidisch uit (denk maar aan het aardoppervlak). We kunnen in principe twee dingen doen: het eerste is een lokaal coördinatenstelsel kiezen dat er zo Euclidisch mogelijk uiziet en t.o.v. zo'n stelsel een infinitesimale parallelle verplaatsing van een vectorveld te definiëren zoals in het Euclidische geval. Een tweede mogelijkheid, in het geval dat M is ingebed in een grotere Euclidische ruimte E_n (zoals een bol in E_3), is om een infinitesimale parallelle verplaatsing eerst in E_n toe te passen en het resultaat vervolgens loodrecht op M te projecteren. We zullen zien dat beide constructies hetzelfde resultaat opleveren.

Laat $P \in M$ en $\mathbf{v}$ een vectorveld op M (in elk geval in een omgeving van P). Laat g de metrische tensor zijn en laat de *Christoffelsymbolen* Γ^k_{ij} gedefinieerd zijn door

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{km}(-\partial_m g_{ij} + \partial_i g_{mj} + \partial_j g_{im}). \tag{7.36}$$

We voeren rond P een coördinatenstelsel in, zodat $g_{ij}(P) = \delta_{ij}$ en alle Christoffelsymbolen in P nul zijn: door een orthonormale basis van de raakruimte $T_P M$ te kiezen kunnen we ervoor zorgen dat $g_{ij}(P) = \delta_{ij}$. Laat x^i de bijbehorende coördinaten zijn. Laat nu coördinaten y^j gedefinieerd zijn door

$$x^i - x^i(P) = y^i - \frac{1}{2}\Gamma^i_{k\ell} y^k y^\ell.$$

In een omgeving van P levert dit een reguliere coördinatentransformatie, en de metrische tensor in P is gelijk aan $(dy^i)^2$ (sommatie over i) en alle Christoffelsymbolen in P zijn nul t.o.v. de coördinaten y^i. Dan volgt uit $\partial_m g_{ij} = g_{jk}\Gamma^k_{im} + g_{ik}\Gamma^k_{mj}$ dat ook alle partiële afgeleiden $\partial_m g_{ij}(P) = 0$ zijn. Een dergelijk coördinatenstelsel heet *normaal.* Laat nu v^i de coördinaten van $\mathbf{v}$ zijn (bij normale coördinaten y^i). Dan definiëren we de infinitesimale parallelle verplaatsing van het vectorveld $\mathbf{v}$ van P naar een punt $P + \delta P$ met coördinaten $(\delta y^1, \ldots, \delta y^n)$ d.m.v. $v^i(P \to P + \delta P) = v^i(P)$ (waarbij δy^i infinitesimaal klein is). Dan geldt dat

$$v^i(P + \delta P) - v^i(P \to P + \delta P) = v^i(P + \delta P) - v^i(P) = (\partial_j v^i)(P)\delta y^j = (\nabla_j v^i)(P)\delta y^j$$

waarbij $\nabla \mathbf{v}$ een tensor is met componenten $\nabla_i v^j = \partial_i v^j + \Gamma^j_{ik} v^k$. Het bewijs dat $\nabla \mathbf{v}$ een tensor is, verloopt exact zoals in het Euclidische geval (vergelijk §7.2.)

Als M als deelvariëteit is ingebed in E_N, dan heeft parallelle verplaatsing een eenvoudige meetkundige interpretatie: voor een infinitesimale verplaatsing van $\mathbf{x}$ naar $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ krijgen we de parallelle verplaatsing $\mathbf{v}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x})$ van $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ door $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ op de gebruikelijke manier parallel in E_N naar $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ te verplaatsen, en vervolgens de loodrechte projectie op M (dus op $T_P M$) te nemen, waardoor de componenten die niet in de raakruimte liggen worden verwijderd. Dit is als volgt in te zien: de parallelle verplaatsing van v^i van $\mathbf{x}$ naar $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ zowel in E_N als op M is gedefinieerd door

$$v^i(\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = v^i(\mathbf{x}) - \Gamma^i_{jk} v^j(\mathbf{x})\delta x^k$$

(hierbij loopt zowel j als k van 1 tot n). De Christoffelsymbolen zijn i.h.a. niet gelijk voor E_N en M, maar wel als we zodanige coördinaten hebben gekozen dat $g^{ij} = 0$ als $i = 1, \ldots, n$ en $j = n+1, \ldots, N$ (dit is bijvoorbeeld het geval voor orthogonale coördinaten); M is dan lokaal gedefinieerd door $x^i = x^i_0$ voor $i = n+1, \ldots, N$. In dit geval heeft $v^i(\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \delta\mathbf{x})$ voor $i = 1, \ldots, n$ dezelfde waarde voor E_N als voor M. In het geval dat de coördinaten in $\mathbf{x} \in E_N$ orthogonaal zijn zien we in dat de vector $\mathbf{v}$ parallel wordt verplaatst naar $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ (in de gebruikelijke zin, d.w.z. in E_N) en vervolgens wordt geprojecteerd op M (in feite op de raakruimte aan M in $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$).

Laat nu γ een gladde kromme zijn in M met beginpunt P en eindpunt Q en parameter t. In termen van lokale coördinaten is $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$. De *covariante afgeleide* van v langs γ is gedefinieerd als

$$\frac{Dv^i}{dt} = \frac{dx^j}{dt}\nabla_j v^i. \tag{7.37}$$

Het vectorveld $\mathbf{v}$ heet *parallel langs* γ als $\dfrac{Dv^i}{dt} = 0$. Verder, als X een gegeven raakvector in $T_P M$ is, dan heet $X' \in T_Q M$ de *parallelle verplaatsing langs* γ van X naar Q als er een parallel vectorveld $\mathbf{v}$ langs γ bestaat zodanig dat $\mathbf{v}(P) = X$ en $\mathbf{v}(Q) = X'$. In E_n hangt de parallelle verplaatsing niet af van de kromme, in een willekeurige variëteit is dat wel het geval zoals we verderop zullen zien.

De differentiaalvergelijking voor parallelle verplaatsing luidt dus

$$\frac{Dv^i}{dt} = \frac{dv^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} v^k \frac{dx^j}{dt} = 0. \tag{7.38}$$

Dit is een eerste-orde lineaire differentiaalvergelijking. Als de componenten $v^i(P)$ gegeven zijn dan is er een unieke oplossing voor Q voldoende dicht bij P.

Als X en $\mathbf{v}$ vectorvelden zijn, dan definiëren we de covariante afgeleide $\nabla_X \mathbf{v}$ naar X als het vectorveld met componenten:

$$(\nabla_X \mathbf{v})^j = X^i \nabla_i v^j.$$

I.h.b. is $\nabla_i v^j = (\nabla_{\partial_i} \mathbf{v})^j$. Als $X, Y, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vectorvelden zijn en f, g differentieerbare functies op M zijn, dan is

$$\nabla_{fX+gY} \mathbf{v} = f\nabla_X \mathbf{v} + g\nabla_Y \mathbf{v}, \quad \nabla_X f\mathbf{v} = X(f)\mathbf{v} + f\nabla_X \mathbf{v}, \quad \nabla_X(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \nabla_X \mathbf{v} + \nabla_X \mathbf{w}. \tag{7.39}$$

Verder geldt, omdat $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, dat

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]. \tag{7.40}$$

Als γ een kromme is met raakvector T, dus als $T(\gamma(t)) = \gamma'(t)$, dan is $\dfrac{D\mathbf{v}}{dt} = \nabla_T \mathbf{v}$.

We kunnen de covariante afgeleide ook definiëren voor algemene tensorvelden op M door te eisen dat de covariante afgeleide van een tensor van rang (r, s) weer een tensor van rang (r, s) is, de regel van Leibnitz geldt voor tensorproducten en dat covariante afgeleide nemen commuteert met contractie. Verder is voor een scalair veld f op M, $\nabla_X f$ gedefinieerd als $X(f)$. Dan geldt voor een covectorveld ω (X, Y zijn vectorvelden):

$$X(\omega(Y)) = \nabla_X \omega(Y) = \omega(\nabla_X Y) + (\nabla_X \omega)(Y).$$

Hieruit volgt voor de componenten:

$$\nabla_i \omega_j = \partial_i \omega_j - \Gamma^k_{ij} \omega_k \tag{7.41}$$

waarbij $\nabla_i \omega_j = (\nabla_{\partial_i} \omega)_j$ is. Voor een tensorproduct geldt nu

$$\nabla_X (S \otimes T) = S \otimes \nabla_X T + \nabla_X S \otimes T. \tag{7.42}$$

Dit levert de definitie van de componenten van ∇T voor een tensor T van rang (r, s) als

$$\nabla_k T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} = \partial_k T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} + \sum_{m=1}^{r} \Gamma^{i_m}_{\ell k} T^{i_1 \ldots \ell \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} - \sum_{m=1}^{s} \Gamma^{\ell}_{j_m k} T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots \ell \ldots j_s} \tag{7.43}$$

waarbij in elke term van de som de index ℓ van T de index i_m resp. j_m vervangt. Voor de metrische tensor geeft dit

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \Gamma^\ell_{ik} g_{\ell j} - \Gamma^\ell_{jk} g_{i\ell} = 0. \tag{7.44}$$

De covariante afgeleide van de metrische tensor is dus $\nabla g = 0$, net als in het Euclidische geval.

De operator ∇ noemt men wel een *connectie*. De connectie wordt geheel bepaald door de Christoffel-symbolen. Behalve de metrische connectie, die wordt bepaald door de metrische tensor, kan men onafhankelijk van de metriek connecties op een differentieerbare variëteit definiëren d.m.v. (7.39). (7.40) geldt dan i.h.a. echter niet. De tensor T van rang $(2, 1)$ $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ heet in dat geval de *torsie* van de connectie en heeft componenten $T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$. We gaan in dit college hier verder niet op in.

Laat γ een gladde kromme zijn met raakvectorveld T en laat X, Y parallelle vectorvelden langs γ zijn. Dan is $\nabla_T X = \nabla_T Y = 0$ en dus geldt

$$T(g(X,Y)) = \nabla_T g(X,Y) = (\nabla_T g)(X,Y) + g(\nabla_T X, Y) + g(X, \nabla_T Y) = 0$$

aangezien $\nabla g = 0$. Dus is $g(X,Y)$ langs de kromme γ constant, m.a.w. als X, Y parallelle vectorvelden langs γ zijn, dan zijn de lengten $\sqrt{g(X,X)}$, $\sqrt{g(Y,Y)}$ van X en Y langs geheel γ constant en ook is de hoek tussen X en Y constant langs γ.

Opmerking: Een voorstelling van parallelle verplaatsing op een fysisch oppervlak (zoals het aardoppervlak) kunnen we maken door een wagentje met daarop bevestigd een wijzer die volkomen wrijvingsloos, maar alleen in horizontale richting kan bewegen. Door dit wagentje over een pad op het oppervlak te laten bewegen wordt de wijzer parallel verplaatst. Een andere toepassing is de slinger van Foucault: aan een ophangpunt is een koord bevestigd met een bol aan het uiteinde die een slingerbeweging maakt. De baan die het ophangpunt van de slinger (dat met de roterende aarde meebeweegt) aflegt, is een breedtecirkel. De slinger zelf voert een parallelle verplaatsing uit. Door de slingerbaan te projecteren op de raakkegel K aan de breedtecirkel, en te bedenken dat het vectorveld op K eveneens parallel is (immers K en de bol hebben in elk punt hetzelfde raakvlak), kunnen we door de kegel open te knippen en in een plat vlak te leggen, eenvoudig inzien dat de hoek die de richting waarin de slinger beweegt na één dag over $2\pi \sin\Theta$ is verschoven, waarbij Θ de breedtegraad is.

Geodeten. In de Euclidische ruimten E_n kennen we het begrip van een rechte (lijn). Een eigenschap die rechten van andere krommen onderscheidt (en die naar algemenere variëteiten te generaliseren is), is dat de parallelle verplaatsing van een raakvector langs de rechte een raakvectorveld oplevert. De covariante afgeleide van T langs γ is dus nul. Deze eigenschap kunnen we ook opleggen aan krommen op een Riemannse variëteit M.

Definitie: Een gladde kromme γ op een Riemannse variëteit M heet een *geodeet* als γ een raakvectorveld $T = \gamma'(s)$ heeft zodanig dat $\nabla_T T = 0$

De eis dat T overal langs γ parallel is, houdt in dat $\|T(s)\|$ overal constant is langs γ. Dit laatste is niet een eigenschap van de kromme, maar van de parameter s: als s, t twee verschillende parameters zijn voor γ, dan is $\|\gamma'(t)\| = \|\gamma'(s)\| \cdot \left|\frac{ds}{dt}\right|$. We kunnen dus altijd een parameter s vinden waarvoor geldt dat $\|\gamma'(s)\| = 1$. s heet ook wel de booglengte-parameter, omdat de lengte van het stuk kromme tussen $\gamma(s = c)$ en $\gamma(s = d)$ gelijk is aan $\left|\int_c^d ds\right| = |d - c|$. In het geval van een geodeet heet s een *affiene parameter* als $\|\gamma'(s)\|$ constant is. Een affiene parameter is op een constante factor na een booglengte-parameter.

We leiden een differentiaalvergelijking af voor een geodeet. Laat s een affiene parameter voor γ zijn, $a \le s \le b$, en $\gamma(s) = (x^1(s), \ldots, x^n(s))$. Dan is $T^i(\gamma(s)) = (x^i)'(s)$ en uit $\nabla_T T = 0$ volgt

$$0 = \frac{DT^j}{ds} = \frac{dT^j}{ds} + \Gamma^j_{ik} T^i T^k = \frac{d^2 x^j}{ds^2} + \Gamma^j_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds}. \tag{7.45}$$

Dit is een tweede-orde differentiaalvergelijking in $x^i(s)$. Door voor een vaste $s = s_0$ de waarde van $x^i(s_0)$ en $x^{i'}(s_0)$ te kiezen, leggen we de oplossing uniek vast in een omgeving $(s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon)$. Door een gegeven punt gaat dus in elke richting precies één geodeet. In termen van een willekeurige parameter t luidt de differentiaalvergelijking voor een geodeet

$$\frac{d^2 x^j}{dt^2} + \Gamma^j_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} + \frac{dx^j}{ds} \frac{d^2 t}{ds^2} \left(\frac{dt}{ds}\right)^{-2} = 0. \tag{7.46}$$

In de Euclidische ruimte met Cartesische coördinaten zijn de Christoffelsymbolen Γ^j_{ik} overal nul en dan is de vergelijking van een geodeet $\dfrac{d^2x^j}{ds^2} = 0$, en de oplossing $x^j(s) = a^j s + b^j$ is inderdaad de parametervoorstelling van een rechte lijn. Merk op dat op een willekeurige Riemannse variëteit t.o.v. normale coördinaten rond een punt P de vergelijking van een geodeet in het punt P eveneens is $\dfrac{d^2x^j}{ds^2} = 0$ (maar alleen in P, niet buiten P).

§7.10. De Riemann-krommingstensor en geodetische deviatie.

Een intrinsieke eigenschap die een algemene Riemannse variëteit onderscheidt van de Euclidische ruimte, is de kromming. Kromming kan worden uitgedrukt in termen van de krommingstensor. We zullen deze definiëren en een meetkundige interpretatie geven. Beschouw hiertoe eerst een rechthoek in E_n. Als we beginnen in een van de hoekpunten en daar een vector $\mathbf{v}$ nemen, vervolgens de rechthoek doorlopen waarbij we de vector $\mathbf{v}$ parallel verplaatsen, dan is de waarde van de componenten v^i gelijk aan de oorspronkelijke waarde. Voor een willekeurige variëteit hoeft dit niet het geval te zijn; beschouw op de bol een driehoek bestaande uit een kwart lengtecirkel vanuit de noordpool naar een punt op de evenaar; loop een stukje langs de evenaar, en keer vervolgens over een kwart lengtecirkel terug naar de noordpool. Als we een willekeurige vector langs deze driehoek parallel verplaatsen dan valt de parallel verplaatste vector aan het eind niet meer samen met die aan het begin. Dit is een teken dat het oppervlak gekromd is. Een maat voor de kromming (in een punt P) wordt gegeven door de Riemann-krommingstensor. Deze wordt als volgt gedefinieerd: laat X, Y, Z vectorvelden zijn. Dan is R een tensor van rang $(1,3)$ met componenten $R^i_{jk\ell}$ zodanig dat

$$R(X,Y,Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \qquad R(X,Y,Z)^i = R^i_{jk\ell} X^k Y^\ell Z^j. \tag{7.47}$$

M.b.v. (7.44) kunnen we de componenten van R uitdrukken in termen van de Christoffel-symbolen:

$$R^i_{jk\ell} = \partial_k \Gamma^i_{j\ell} - \partial_\ell \Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{mk} \Gamma^m_{j\ell} - \Gamma^i_{m\ell} \Gamma^m_{jk}. \tag{7.48}$$

De krommingstensor heeft de volgende meetkundige interpretatie: Laat $P \in M$, en X, Y, Z raakvectoren in P. Kies $\epsilon > 0$ klein. We lopen vanuit P over een afstand ϵ langs de geodeet met richting X naar het punt Q. Hierbij worden X en Y parallel verplaatst. Vervolgens lopen we vanuit Q over een afstand ϵ langs de geodeet in de richting van Y_Q naar het punt S waarbij X en Y weer parallel verplaatst worden. Tevens lopen we vanuit P over een afstand ϵ langs de geodeet met richting Y naar het punt R. Hierbij worden X en Y weer parallel verplaatst. Vervolgens lopen we vanuit R over een afstand ϵ langs de geodeet in de richting van X_R naar het punt S', en verplaatsen daarbij nogmaals X en Y parallel. Nu is S niet gelijk aan S' maar het verschil in coördinaten van S en S' is $O(\epsilon^2)[X,Y]^i$ en omdat $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X = 0$, zijn S en S' tot op orde ϵ^3 gelijk. Tot op orde ϵ^3 is $PQSR$ dus een vierhoek, bestaande uit geodeten. Parallelle verplaatsing van Z langs PQ en dan QS geeft een vector Z', parallelle verplaatsing langs PR en dan RS geeft een vector Z''. I.h.a. zijn Z' en Z'' verschillend en het verschil is

$$(Z' - Z'')^i = \pm \epsilon^2 R^i_{jk\ell} X^k Y^\ell Z^j + O(\epsilon^3).$$

Een speciaal geval is het geval dat $Z = X$. In $S = S'$ raakt X aan de geodeet QS' en $X' = X$. Het verschil tussen X en X'' meet dan in hoeverre parallelle geodeten uit elkaar lopen. $(X - X'')^i =$

$\pm\epsilon^2 R^i_{jk\ell} X^j X^k Y^\ell$ is de *geodetische deviatie.* In termen van de relativiteitstheorie (zie de volgende paragraaf voor een korte ineiding) kan dit geïnterpreteerd worden als een getijde-effect in een niet-homogeen gravitatieveld.

Tussen de componenten van de krommingstensor bestaan allerlei relaties (zoals $R^i_{jk\ell} = -R^i_{j\ell k}$) die het aantal onafhankelijke componenten reduceren van 256 naar 20. Als er een coördinatenstelsel bestaat zodanig dat in elk punt van de variëteit de metrische tensor nul is dan is de krommingstensor nul. De variëiteit is dan vlak.

§7.11. De algemene relativiteitstheorie van Einstein.

De vierdimensionale ruimte-tijd uit de algemene relativiteitstheorie is een differentieerbare variëteit met een pseudo-Riemannse metrische tensor $g_{\mu\nu}$ met signatuur (1,3), m.a.w. de matrix $(g_{\mu\nu})$ heeft een positieve eigenwaarde en drie negatieve eigenwaarden. De richting corresponderend met de positieve eigenwaarde wordt geïdentificeerd met de tijdrichting, de richtingen corresponderend met de positieve eigenwaarden als ruimtelijk. De metrische tensor wordt beïnvloed door de massaverdeling. In een compleet vacuum is de metriek gelijk aan de Minkowskimetriek; de ruimtetijd is dan vlak. Afwijkingen van de Minkowskimetriek worden geïnterpreteerd als gravitatiekrachten; de metrische tensor speelt de rol van een gravitatie-potentiaal, analoog aan de Newtonse scalaire potentiaal V en de elektromagnetische potentiaal A^μ die een vector is. Aangenomen wordt dat $g_{\mu\nu}$ voldoende vaak (d.w.z. tweemaal) differentieerbaar is: in dit geval zijn er in elk punt P normale coördinaten, ten opzichte waarvan de metrische tensor $g_{\mu\nu}(P)$ gelijk is aan $\eta_{\mu\nu}$ en $\partial_\lambda g_{\mu\nu}(P) = 0$. Zo'n coördinatenstelsel heet een *lokaal inertiaalstelsel* in P. We zoeken nu twee vergelijkingen: een veldvergelijking, die de potentialen $g_{\mu\nu}$ relateert aan de massaverdeling, en een bewegingsvergelijking, die de beweging van een puntdeeltje beschrijft. Hierbij wordt er van uitgegaan dat de massa van het deeltje zo klein is dat het deeltje het veld $g_{\mu\nu}$ niet beïnvloedt. Zo'n deeltje noemen we een testdeeltje. De volgende overwegingen gelden nu: op de eerste plaats moeten de beide vergelijkingen dezelfde vorm hebben t.o.v. ieder coördinatenstelsel, omdat er geen coördinatenstelsel is dat een speciale status heeft. Dit principe heet het covariantieprincipe. Het komt erop neer dat de beide vergelijkingen tensorvergelijkingen moeten zijn. Het tweede principe is dat de vergelijkingen t.o.v. een (lokaal) inertiaalstelsel dezelfde vorm hebben als in de speciale relativiteitstheorie, d.w.z. als er geen zwaartekrachtsvelden zijn. Dit heet het equivalentieprincipe. Het derde principe is dat voor zwakke velden, dus in het geval dat (t.o.v. een geschikt coördinatenstelsel) $h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}$ klein is, de vergelijkingen kunnen worden teruggebracht tot de vergelijkingen van Newton. We beschouwen eerst de bewegingsvergelijking voor een testdeeltje met massa m. Bij afwezigheid van enig krachtveld (dus voor een vrij deeltje) is de vergelijking in een inertiaalstelsel $m\dfrac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0$, waarbij τ de eigentijd is, m.a.w. $c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Volgens het equivalentieprincipe is dit de bewegingsvergelijking in een lokaal inertiaalstelsel. In een lokaal inertiaalstelsel wordt de zwaartekracht dus niet gevoeld. De eigentijd is de tijd die gemeten wordt door een waarnemer die zich in rust bevindt t.o.v. het lokale inertiaalstelsel. Een voorbeeld van zo'n lokaal inertiaalsysteem is een coördinatensysteem dat meebeweegt met een waarnemer die zich in vrije val bevindt in een statisch zwaartekrachtveld. Voor de algemene bewegingsvergelijking hoeven we de bewegingsvergelijking voor een lokaal inertiaalstelsel alleen om te zetten naar algemene coördinaten. Het is niet moeilijk om na te gaan dat dit precies de geodetenvergelijking (7.45) (met $s = \tau$) levert, m.a.w. in de afwezigheid van andere typen krachtvelden (dan de zwaartekracht) volgt een testdeeltje een geodeet in de ruimte-tijd. Merk op dat de vorm van een geodeet afhangt van $g_{\mu\nu}$. Om het verband tussen de metrische tensor en de klassieke Newtonse potentiaal te zien, nemen we aan dat er een statisch en zwak gravitatieveld is, zodat $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$ (waarbij $x^0 = ct$ met t de tijscoördinaat en x^i voor $i = 1, 2, 3$ ruimtelijke coördinaten voorstellen). Als de snelheid van het deeltje klein is t.o.v. de lichtsnelheid, dan is $\frac{dx^i}{d\tau}$ voor $i = 1, 2, 3$ klein in vergelijking met $\frac{dx^0}{d\tau}$. Dan is $\frac{dt}{d\tau} \approx 1$ en (7.42) wordt dan voor $i = 1, 2, 3$: $\frac{d^2x^i}{dt^2} = -c^2\Gamma^i_{00}$. Anderzijds is in de Newtonse theorie $m\frac{d^2x^i}{dt^2} = -m\frac{\partial V}{\partial x^i}$, waarbij V de gravitatiepotentiaal is. Omdat $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ klein is en tijdsafgeleiden nul heeft, is $\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2}g^{ij}\partial_j h_{00} \approx -\frac{1}{2}\partial_i h_{00}$. We zien dus dat onder de gedane aannamen de Newtonse potentiaal V kunnen identificeren met $\frac{1}{2}c^2 h_{00}$, zoals we kunnen inzien door de dimensies te vergelijken. Op dezelfde wijze moet de veldvergelijking in de Newtonse limiet de vergelijking van Poisson $\Delta V = 4\pi G\rho$ opleveren (waarbij G de gravitatieconstante is en ρ de massadichtheid). In plaats van één scalaire vergelijking zoeken we nu naar een tensorvergelijking. Net als de vergelijking van Poisson wordt dit een vergelijking in (hoogstens) de tweede afgeleiden van $g_{\mu\nu}$. De krommingstensor is een tensor die afhangt van hoogstens de tweede afgeleiden van $g_{\mu\nu}$. De afgeleiden van de krommingstensor bevatten hogere afgeleiden en deze treedt dus niet op. We geven slechts het resultaat. Dit is de *Einstein-veldvergelijking* $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$. Hierbij is $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$ de *Riccitensor*, $R = g_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ de *scalaire kromming*, Λ is een (constante) scalar, de *kosmologische constante*, en $T_{\mu\nu}$ is de *energie-impulstensor*, waarvan de component T_{00} de energiedichtheid weergeeft - dit is ook de component die in de Newtonse limiet samenvalt met de vergelijking van Poisson. κ tenslotte is een koppelingsconstante die de sterkte van de koppeling van het gravitatieveld $g_{\mu\nu}$ aan de materie bepaalt; door te vergelijken met de vergelijking van Poisson vinden we $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$. Merk op dat de Einsteinvergelijking in feite een geheel van 10 niet-lineaire vergelijkingen voorstelt. Voor het algemene geval bestaat er geen gesloten oplossing. Oplossingen kunnen worden gevonden in het geval dat het veld zwak is en we een lineaire benadering kunnen maken, of in het geval dat er voldoende symmetrie is: zo kan onder de aannamen dat het veld bolsymmetrisch is en niet van de tijd afhangt de oplossing in de vorm $ds^2 = c^2(1 - \frac{2m}{r})dt^2 - (1 - \frac{2m}{r})^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2)$ worden uitgedrukt, waarbij m een constante is. Deze oplossing heet de *Schwarzschild-oplossing*.

§7.12. Appendix A: Lorentz- of 4-tensoren.

Analoog aan Cartesische tensoren definiëren we Lorentzvectoren en -tensoren: de vierdimensionale Minkowskiruimte M_4 is een pseudo-Riemannse variëteit die als differentieerbare variëteit diffeomorf is met $\mathbf{R}^4$ maar waarop er een coördinatenstelsel bestaat (met coördinaten x^0, x^1, x^2, x^3) zodanig dat de metrische tensor overal op M_4 gelijk is aan

$$ds^2 = dx^0 \otimes dx^0 - dx^1 \otimes dx^1 - dx^2 \otimes dx^2 - dx^3 \otimes dx^3.$$

I.p.v. g_{ij} noteren voor deze speciale vorm van de componenten van de metrische tensor η_{ij}. Verder worden in de literatuur vaan Griekse symbolen voor de indices gebruikt. De keuze voor x^0 i.p.v. x^4 voor de vierde coördinaat is traditioneel: in de relativiteitstheorie wordt x^0 als een tijdscoördinaat geïnterpreteerd.

Voor de covariante componenten x_μ van de vector $\mathbf{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ geldt dus $x_\nu = \eta_{\nu\mu}x^\mu$ m.a.w. $x^0 = x_0$ en $x^i = -x_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Merk op dat het Minkowski-inproduct $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3$ tussen twee vectoren x en y gelijk is aan $x_\mu y^\mu = x^\mu y_\mu$. Een *Lorentztransformatie* $x^i \to x'^i$ is een inverteerbare lineaire transformatie van $\Lambda : M_4 \to M_4$ die het Minkowski-inproduct tussen twee vectoren invariant laat, m.a.w. $x'^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu x^\mu$ waarbij $\Lambda = (\Lambda^\nu{}_\mu)$ een matrix is zodanig dat voor $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ willekeurige vectoren in $\mathbf{R}^4$: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\Lambda\mathbf{x}, \Lambda\mathbf{y})$

ofwel $\Lambda^T H \Lambda = H$ waarbij $H = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ de matrix van de metrische tensor is. Voor de covariante componenten geldt dan $x'_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu x_\mu$. Omdat het inproduct $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ in termen van componenten geschreven kan worden als $x^\mu y_\nu$ of $x_\mu y^\nu$ geldt voor de componenten van willekeurige vectoren $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ in M_4 t.o.v. twee verschillende bases:

$$x'^\mu y'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\rho x^\nu y_\rho = x^\nu y_\nu$$

zodat $\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\rho = \delta^\rho_\nu$. T met componenten $T^{\nu\rho}_\mu$ is nu een Lorentztensor van rang (2,1) als T onder een Lorentztransformatie $x^\nu \to x'^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu x^\mu$ transformeert als $(T')^{\kappa\lambda}_\sigma = \Lambda_\sigma{}^\mu \Lambda^\kappa{}_\nu \Lambda^\lambda{}_\rho (T)^{\nu\rho}_\mu$. Op soortgelijke wijze is een Lorentztensor van rang (k, ℓ) gedefinieerd. Net als in het algemene geval is δ^ν_μ een tensor van rang (1,1); de metrische tensor $\eta_{\mu\nu}$ is een covariante tensor van rang 2 met inverse $\eta^{\mu\nu}$ en het volledig antisymmetrische Levi-Civitasymbool $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ (met $\epsilon_{0123} = 1$) is een covariante Lorentzpseudotensor van rang 4. De Lorentztransformaties vormen een groep, net als de orthogonale transformaties in $\mathbf{R}^n$. We zullen deze later nader bestuderen.

§7.13. Appendix B: De Hodge-steroperator.

Analoog aan het geval dat de vectorruimte V voorzien is van een positief-definiete metrische tensor (vergelijk §6.6), kan de Hodge-steroperator ook worden gedefinieerd voor het geval dat V een niet-gedegenereerde matriek $g = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$ heeft. In dit geval kunnen we de Levi-Civitàtensor met de metrische tensor samentrekken tot een Levi-Civitàtensor van rang (p, q) (met $p + q = n$):

$$\epsilon^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} = g^{j_1 k_1} \ldots g^{j_q k_q} \epsilon_{i_1 \ldots i_p k_1 \ldots k_q} \tag{7.49}$$

waarbij $\epsilon_{12\ldots n} = 1$. De Hodge-steroperator is nu een lineaire afbeelding $* : \bigwedge^p(V) \to \bigwedge^{n-p}(V)$ die gedefinieerd is door

$$*(\mathbf{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \ldots \mathbf{e}_{i_p}) = \frac{1}{(n-p)!} \epsilon^{j_1 \ldots j_{n-p}}_{i_1 \ldots i_p} \mathbf{e}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{j_{n-p}}. \tag{7.50}$$

Opnieuw geldt dat $** = \pm id$ en $*$ levert dus een vectorruimte-isomorfisme van $\bigwedge^p(V)$ met $\bigwedge^{n-p}(V)$.

Voorbeelden: Zij M de Minkowskiruimte $\mathbf{R}^4$ met metrische tensor $g = dx^0 dx^0 - dx^1 dx^1 - dx^2 dx^2 - dx^3 dx^3$. Dan is

$$*dx^0 = \epsilon^0_{123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = -dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \quad *dx^0 \wedge dx^1 = \epsilon^{01}_{23} dx^2 \wedge dx^3 = -dx^2 \wedge dx^3,$$

$$*dx^1 \wedge dx^2 = \epsilon^{12}_{03} dx^0 \wedge dx^3 = dx^0 \wedge dx^3, \quad *dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \epsilon^{123}_0 dx^0 = -dx^0.$$

Toepassing: de Maxwellvergelijkingen. De Maxwellvergelijkingen voor het electromagnetische veld in drie dimensies luiden

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

waarbij $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ het electrische, resp. magnetische veld voorstellen; ρ en $\mathbf{j}$ zijn de ladingsdichtheid resp. de stroomdichtheid. Uit Poincaré's lemma volgt dat $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ voor zeker vectorveld $\mathbf{A}$, de vectorpotentiaal; verder volgt uit de derde vergelijking $\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)$ m.b.v. Poincaré's lemma dat $\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi$ voor zeker scalair veld ϕ, de scalaire potentiaal. We kunnen contravariante 4-vectoren definiëren:

$$A^\mu = (\phi, A^1, A^2, A^3), \qquad j^\mu = (\rho, j^1, j^2, j^3).$$

Door contractie met de metrische tensor $\eta_{\mu\nu}$ in de Minkowski-ruimte ontstaan de covariante 4-vectoren

$$A_\mu = (\phi, -A^1, -A^2, -A^3), \qquad j_\mu = (\rho, -j^1, -j^2, -j^3).$$

Beschouw nu de differentiaalvormen $A = A_\mu dx^\mu$ en $j = j_\mu dx^\mu$ (waarbij dus $x^0 = t$ en $A_0 = \phi, j_0 = \rho$ zijn). Dan geldt

$$dA = F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

waarbij $F_{12} = -F_{21} = -B^3$, $F_{01} = -F_{10} = E^1$ etc. F heet de veldtensor. De matrix $(F_{\mu\nu})$ wordt dus gegeven door $\begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$. Nu is $*F = \frac{1}{2}\tilde{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ waarbij de matrix $(\tilde{F}_{\mu\nu})$ gegeven wordt door $\begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & -E^3 & E^2 \\ B^2 & E^3 & 0 & -E^1 \\ B^3 & -E^2 & E^1 & 0 \end{pmatrix}$. Dan is $* \, d * F = j$. en verder is $dF = d^2 A = 0$. De Maxwellvergelijkingen kunnen dus in termen van de veldtensor F geschreven worden als

$$dF = 0, \qquad * \, d * F = j.$$