Aanvulling Analyse 3NA.

1. De onzekerheidsrelatie.

Laat $L_2(\mathbf{R})$ de vectorruimte van kwadratisch intregreerbare functies zijn: $f \in L_2(\mathbf{R})$ als de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$. bestaat. Op $L_2(\mathbf{R})$ kunnen we een inwendig product definiëren d.m.v.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) dx.$$

Dan geldt de ongelijkheid van Schwarz:

$$|\langle f, g \rangle|^2 \leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle. \tag{1}$$

De Fouriergetransformeerde $\hat{f}$ van f is gedefinieerd en volgens de identiteit van Parseval is

$$\langle f, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle. \tag{2}$$

We nemen aan dat de functie f op 1 genormeerd is: $\langle f, f \rangle = 1$. Dan is volgens (2) ook $\langle \hat{f}, \hat{f} \rangle = 1$. f en $\hat{f}$ kunnen we dus opvatten als kansdichtheden. Nu zijn de verwachting $\bar{x}$ en de spreiding (of standaardafwijking) Δx van x gedefinieerd als resp.

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x |f(x)|^2 dx, \qquad (\Delta x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 |f(x)|^2 dx.$$

Analoog zijn de $\bar{\omega}$ en $\Delta\omega$ gedefinieerd. Nu geldt:

Propositie 1 (*de onzekerheidsrelatie*): Onder de hierboven gedane aannamen geldt: $\Delta x \cdot \Delta\omega \geq \dfrac{1}{2}$.

Bewijs: We kunnen zonder beperking der algemeenheid aannemen dat $\bar{x} = 0$. De Fouriergetransformeerde van $xf(x)$ is $i\hat{f}'(\omega)$. We moeten dus aantonen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}'(\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \bar{\omega})^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \geq \frac{1}{4}.$$

In termen van het inproduct is dit

$$\langle \hat{f}', \hat{f}' \rangle \cdot \langle (\omega - \bar{\omega}) f, (\omega - \bar{\omega}) f \rangle \geq \frac{1}{4}.$$

We kunnen afgeleide nemen en vermenigvuldigen met $\omega - \bar{\omega}$ als lineaire operatoren D, Ω op (een lineaire deelruimte W van) de vectorruimte $L_2(\mathbf{R})$ beschouwen: $Dh = h'$ en $\Omega h = (\omega - \bar{\omega})h$. De operatoren zijn niet op de gehele vectorruimte $L_2(\mathbf{R})$ gedefinieerd omdat niet elke $h \in L_2(\mathbf{R})$ een afgeleide in $L_2(\mathbf{R})$ heeft en omdat vermenigvuldiging van een L_2-functie met x niet een L_2-functie hoeft op te leveren. Er geldt voor $h, k \in W$, omdat $\lim_{x \to \pm\infty} h(x) = \lim_{x \to \pm\infty} k(x) = 0$:

$$\langle Dh, k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{h'(x)} k(x) dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \overline{h(x)} k'(x) dx = -\langle h, Dk \rangle \tag{3a}$$

en, omdat $\omega - \bar{\omega}$ reëel is,

$$\langle \Omega h, k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \bar{\omega}) \overline{h(x)} k(x) dx = \langle h, \Omega k \rangle. \tag{3b}$$

Nu geldt, volgens (1) en (3a,b), en volgens $|z| \geq |\mathrm{Re}(z)| = |(z + \bar{z})|/2$ voor $z \in \mathbf{C}$:

$$\langle \hat{f}', \hat{f}' \rangle \cdot \langle (\omega - \bar{\omega}) f, (\omega - \bar{\omega}) f \rangle \geq |\langle \hat{f}', (\omega - \bar{\omega}) \hat{f} \rangle|^2 = |\langle D\hat{f}, \Omega \hat{f} \rangle|^2 \geq$$

$$\geq \frac{1}{4} \left(\langle D\hat{f}, \Omega\hat{f} \rangle + \overline{\langle D\hat{f}, \Omega\hat{f} \rangle} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\langle D\hat{f}, \Omega\hat{f} \rangle + \langle \Omega\hat{f}, D\hat{f} \rangle \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \langle (\Omega D - D\Omega)\hat{f}, \hat{f} \rangle^2 = \frac{1}{4} \langle -\hat{f}, \hat{f} \rangle^2 = \frac{1}{4},$$

waarbij we in de laatste regel hebben gebruikt dat

$$(\Omega D - D\Omega)\hat{f}(\omega) = (\omega - \bar{\omega})\hat{f}'(\omega) - \frac{d}{d\omega}((\omega - \bar{\omega})\hat{f}(\omega)) = -\hat{f}(\omega). \qquad \diamond$$

2. De stelling van Nyquist-Shannon en de somformule van Poisson. Als $f = f(t)$ een functie van de tijd t is, dan is de Fourier-getransformeerde $\hat{f}(\omega)$ op te vatten als de amplitude-dichtheid van $f(t)$ bij frequentie ω. De waarden van $\hat{f}(\omega)$ bepalen dus het (frequentie-)spectrum van f. Om het spectrum te kennen, moeten we derhalve alle waarden van $f(t)$ kennen. In de praktijk beschikt men echter slechts over een discrete verzameling waarden. De stelling van Nyquist-Shannon zegt dat als de *bandbreedte* kleiner is dan een zekere B, d.w.z. als $\hat{f}(\omega) = 0$ voor $|\omega| \geq B$, dan kan de functie $f(t)$ (en dus de Fouriergetransformeerde $\hat{f}(\omega)$) geheel gereconstrueerd worden uit de discrete verzameling waarden $\{f(nT)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, mits $T \leq \pi/B$. We geven twee bewijzen:

Bewijs 1: Omdat $\hat{f}(\omega) = 0$ als $|\omega| \geq B$, is $\hat{f}(\omega)$ op $[-B, B]$ in een Fourierreeks te ontwikkelen:

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\pi i n \omega / B} \tag{4}$$

waarbij de Fouriercoëfficiënten gegeven worden door

$$c_n = \frac{1}{2B} \int_{-B}^{B} \hat{f}(\omega) e^{-\pi i n \omega / B} d\omega = \frac{1}{2B} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-\pi i n \omega / B} d\omega = \frac{\sqrt{2\pi}}{2B} f(-\frac{\pi n}{B}).$$

Door c_n weer in (4) in te vullen vinden we, met $T = \pi/B$:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-inT\omega}.$$

Uit de omkeerformule voor Fouriertransformatie volgt nu $f(t)$; omdat $\hat{f}(\omega) = 0$ voor $|\omega| \geq B$ integreren we slechts over $[-B, B]$:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{B} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} dt = \frac{T}{2\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \int_{-B}^{B} e^{i\omega(t - nT)} d\omega =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \cdot \mathrm{sinc}(\pi(\frac{t}{T} - n)). \qquad \diamond$$

Het tweede bewijs is wiskundig minder precies maar geeft een beter begrip van de voorwaarde $T \leq \pi/B$. We leiden eerst een verband af tussen de periodieke som van waarden van een functie f en van zijn Fouriergetransformeerde:

Propositie 2 (*de somformule van Poisson*): Laat f continu en absoluut integreerbaar zijn op $\mathbf{R}$ (d.w.z. de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ bestaat). Dan is voor $t, T \in \mathbf{R}$ en $T > 0$ de reeks $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + nT)$ (absoluut) convergent en verder geldt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\frac{2\pi m}{T}) e^{2\pi i m t/T}. \tag{5}$$

Bewijs: De (absolute) convergentie van de reeks volgt onmiddellijk uit de absolute integreerbaarheid van f (teken een plaatje!). Laat $F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + nT)$. De functie $F(t)$ is periodiek met periode T en is in een Fourierreeks te ontwikkelen:

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2i\pi n t/T}$$

waarbij

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(u) e^{-2i\pi n u/T} du = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(u + mT) e^{-2i\pi n(u+mT)/T} du =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2i\pi n u/T} du = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \cdot \hat{f}(\frac{2\pi n}{T}).$$

Invullen in de Fourierreeks levert het gewenste resultaat:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT) = F(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\frac{2\pi n}{T}) e^{2\pi i m t/T}.$$

Bewijs 2 van N.-Sh.: Toepassing van de somformule van Poisson op de *Dirac-kam* $F(t) = T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t + nT)$ levert de volgende uitdrukking:

$$T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t+nT) = \sqrt{2\pi} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{\delta}(\frac{2\pi m}{T}) e^{2\pi i m t/T} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i m t/T} \tag{6}$$

waarbij gebruikt is dat $\hat{\delta}(\omega) = 1/\sqrt{2\pi}$.

Laat nu f een functie zijn met Fouriergetransformeerde $\hat{f}$ zodanig dat $\hat{f}(\omega) = 0$ voor $|\omega| \leq B$. Zij $T = \pi/B$. We tonen aan dat $\hat{f}(\omega)$ geheel bepaald wordt door de rij $\{f(nT)\}_{n=-\infty}^{\infty}$. We definiëren de *sampling functie* $f_s(t) = T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t + nT)$. $f_s(t)$ is geheel bepaald door de waarden van $f(nT)$; i.h.b. is $f_s(t) = 0$ als $t \neq nT$ voor zekere gehele waarde van n. We laten nu zien dat $\hat{f}(\omega)$ afgeleid kan worden uit $\hat{f}_s(\omega)$. Inderdaad is

$$\hat{f}_s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_s(t) e^{-i\omega t} dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(t) e^{2\pi i m t/T - i\omega t} dt = \sqrt{2\pi} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega - \frac{2\pi m}{T}),$$

waarbij formule (6) is gebruikt. Het spectrum $\hat{f}_s(\omega)$ van $f_s(t)$ is dus (op een factor $\sqrt{2\pi}$ na) gelijk aan oneindig veel kopieën van het spectrum $\hat{f}(\omega)$ van $f(t)$ die onderling telkens over een afstand van $2\pi/T = 2B$ verschoven zijn. Omdat $\hat{f}(\omega) = 0$ als $|\omega| \geq B$, overlappen deze verschillende kopieën elkaar niet en dus is het spectrum van $f(t)$ geheel te herleiden uit dat van de sampling functie $f_s(t)$. $\diamond$