V. Partiële differentiaalvergelijkingen.

§5.1 Algemene begrippen.

We beschouwen in dit hoofdstuk lineaire partiële differentiaalvergelijkingen (PDV), d.w.z. vergelijkingen van de vorm

$$L(u) = \sum_{|J| \leq M} a_J(\mathbf{x}) \frac{d^{|J|}u}{d\mathbf{x}^J} = f(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in G \subset \mathbf{R}^n \tag{5.1}$$

waarbij $J = (j_1, \ldots, j_n)$ een n-tupel van natuurlijke getallen is, $|J| = j_1 + \ldots + j_n$ en $\frac{d^{|J|}}{d\mathbf{x}^J}$ staat voor $\frac{\partial^{|J|}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}}$. Als niet alle a_J met $|J| = M$ nul zijn, dan heet M de *orde* van de PDV. De PDV (5.1) heet *homogeen* als de functie f in het rechterlid nul is, anders inhomogeen. De termen $\sum_{|J|=M} a_J(\mathbf{x}) \frac{d^{|J|}u}{d\mathbf{x}^J}$ van orde M vormen het *hoofddeel* van de differentiaaloperator. De differentiaaloperator L is een lineaire operator, d.w.z. $L(\lambda u + \mu v) = \lambda L(u) + \mu L(v)$ voor λ, μ reële (of complexe) getallen. I.h.b. geldt dat als $L(u) = 0$ en $L(v) = 0$, dan is $L(\lambda u + \mu v) = 0$. Het feit dat de som van oplossingen van de homogene d.v. ook een oplossing is, wordt wel het *superpositieprincipe* genoemd. Als L alleen lineair is in de afgeleiden van u en de coëfficiënten $a_J = a_J(\mathbf{x}, u)$ ook van u kunnen afhangen, noemen we de PDV *quasilineair*. Voor quasilineaire PDV geldt het superpositieprincipe niet.

Opmerking: In plaats van $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, schrijven we ook u_x resp. u_{xy} etc.

Zoals bij gewone d.v. de oplossing van een eindig aantal integratieconstanten afhangt, hangt bij partiële differentiaalvergelijkingen de oplossing af van een of meer willekeurige functies. Zo is de *algemene* oplossing van de d.v. $u_x(x, y) = 0$ in $\mathbf{R}^2$ gelijk aan $u(x, y) = f(y)$ waarbij f een willekeurige functie van y is. In het algemeen zijn we niet zo in algemene oplossingen geïnteresseerd. Om een concrete oplossing te vinden, moeten we rand- (of begin)voorwaarden toevoegen. Zo ligt u in het bovenstaande voorbeeld vast als we de randvoorwaarde $u(0, y) = g(y)$ toevoegen; dan is $u(x, y) = g(y)$ voor alle x, y. Merk op dat niet elke randvoorwaarde geschikt is: met de randvoorwaarde $u(x, 0) = h(x)$ heeft het systeem een oplossing alleen als h constant is, en bovendien ligt de oplossing alleen vast voor $y = 0$ ($f(0) = h$). We zeggen dat een systeem (bestaande uit een differentiaalvergelijking samen met een aantal randvoorwaarden) *goed gesteld* (in het Engels: *well-posed*) is als:

i. Er een oplossing is.
ii. De oplossing uniek is.
iii. De oplossing continu van de gegevens (de randvoorwaarden en de coëfficiënten van de differentiaaloperator) afhangt.

Een voorbeeld van een systeem waarbij aan de voorwaarde (iii) niet is voldaan, is het volgende:

$$\Delta u = 0, \; u(0, y) = 0, \; u_x(0, y) = \frac{\sin ky}{k} \quad \text{voor } 0 < x < \infty, y \in \mathbf{R}.$$

De oplossing van het systeem is $u(x, y) = \frac{1}{k^2} \sin ky \sinh kx$ (er kan worden aangetoond dat dit de enige oplossing is). Als $k \to \infty$, dan gaat de tweede randvoorwaarde naar nul, echter voor vaste $x = x_0$, gaat $u(x_0, y)$ naar oneindig als $k \to \infty$.

Van een *beginwaarden-* of *Cauchy-randvoorwaardenprobleem* bij een PDV van type (5.1) is sprake als op een hyperoppervlak H in $\mathbf{R}^n$ de waarden van $u(\mathbf{x})$ en van de afgeleiden $\dfrac{\partial^j u}{\partial \nu^j}(\mathbf{x})$ van orde $j = 1, \ldots, M-1$ in de richting van de normaal op H in $\mathbf{x}$ zijn voorgeschreven. Als $u = u(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)$ en H is het hyperoppervlak $t = 0$, dan zijn de randvoorwaarden van de vorm

$$u(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = \phi_0(x_1, \ldots, \phi_{n-1}), \ldots, \frac{\partial^{M-1} u}{\partial t^{M-1}}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = \phi_{M-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \quad (5.2)$$

waarbij $\phi_0, \ldots, \phi_{M-1}$ gegeven functies zijn. De term beginwaardenprobleem is afkomstig van de situatie waarbij t als tijdscoördinaat wordt opgevat.

Beschouw een Cauchy-randwaardenprobleem op een gebied G met rand H. Kies coördinaten $\nu, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ zodanig dat ν constant is op H en $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ coördinaten op H zijn. De coördinaat ν heet de *normale* coördinaat en de τ_j heten *tangentiële* coördinaten. De d.v. (5.1) in termen van de nieuwe coördinaten wordt dan

$$a(\mathbf{x}) \frac{\partial^M u}{\partial \nu^M} = - \sum_{|J|+j \le M, j < M} a_{J,j}(\mathbf{x}) \frac{d^{|J|+j} u}{\partial \tau^J \partial \nu^j} + f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G \subset \mathbf{R}^n, \tag{5.3}$$

Daar nu $u(\mathbf{x}) \ldots, \dfrac{\partial^{M-1} u(\mathbf{x})}{\partial \nu^{M-1}}$ op H gegeven zijn, zijn ook de (tangentiële) afgeleiden $\dfrac{\partial^{|J|+j} u(\mathbf{x})}{\partial \nu^j \partial \tau^J}$ voor $j < M$ te bepalen. Als nu $a(\mathbf{x})$ nergens nul is op H, dan is $\dfrac{\partial^M u(\mathbf{x})}{\partial \nu^M}$ uit (5.3) te bepalen, en door differentiëren ook de hogere afgeleiden naar ν samen met hun tangentiële afgeleiden. De oplossing u ligt dan, althans in een omgeving van H, uniek vast. Als de coëfficiënten $a(\mathbf{x}), a_J(\mathbf{x})$ op H analytische functies zijn en $a(\mathbf{x}) \neq 0$ voor $\mathbf{x} \in H$, en de randvoorwaarden zijn gegeven door analytische functies $\phi_0, \ldots, \phi_{M-1}$ dan is er een omgeving van H in $\mathbf{R}^n$ waarop de oplossing uniek en analytisch is. Dit resultaat staat bekend als de stelling van *Cauchy-Kovalevskaya.*

Het omgekeerde geval doet zich voor als $a(\mathbf{x}) = 0$ voor $\mathbf{x} \in H$. In dit geval is $\dfrac{\partial^M u}{\partial \nu^M}$ (en ook de hogere afgeleiden naar ν op H) niet uit de randvoorwaarden te bepalen. Maar dan is de waarde van de oplossing $u(\mathbf{x})$ buiten H niet te bepalen. H heet in zo'n geval een *karakteristiek hyperoppervlak* en ν heet een *karakteristieke coördinaat* als $\nu =$ constant op H. Merk op dat de waarde $L(u)$ in dit geval geheel vastligt door de randvoorwaarden op H. Het Cauchy-probleem is wel locaal oplosbaar als het beginwaardenhyperoppervlak H nergens raakt aan een karakteristiek hyperoppervlak.

§5.2. Quasilineaire PDV van eerste orde. Karakteristieken.

Laat $u = u(\mathbf{x})$ een functie van n variabelen $x_1, \ldots, x_n$ zijn. Beschouw de quasilineaire PDV van 1e orde voor $\mathbf{x} \in G \subset \mathbf{R}^n$

$$a_1(\mathbf{x}, u) u_{x_1} + \ldots + a_n(\mathbf{x}, u) u_{x_n} = b(\mathbf{x}, u). \tag{5.4}$$

Als alle coëfficiënten $a_1, \ldots, a_n$ nul zijn voor zekere $\mathbf{x} \in G$, dan is $\mathbf{x}$ een *singulier punt* van de differentiaalvergelijking. Dit geval laten we buiten bewschouwing, m.a.w. we nemen aan dat de functies $a_1(\mathbf{x}, u), \ldots, a_n(\mathbf{x}, u)$ nergens op G gelijktijdig nul zijn. Meetkundig kunnen we een oplossing $u = u(\mathbf{x})$ voorstellen als een hyperoppervlak in $\mathbf{R}^{n+1}$ waarbij we u als $n+1$-e coördinaat toevoegen. Zo'n oppervlak dat de grafiek van de oplossing voorstelt, heet een *integraaloppervlak.* Vergelijking (5.4) zegt dat de normaal $(u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, -1)$ op het oppervlak in elk punt van het integraaloppervlak loodrecht staat op de vector $(a_1, \ldots, a_n, b)$. Een *karakteristiek* of *karakteristieke* *kromme* op het oppervlak is een kromme die in elk punt de vector $(a_1, \ldots, a_n, b)$ als richtingsvector heeft. Zo'n kromme $(x_1(s), \ldots, x_n(s), u(s))$ voldoet aan het stelsel gewone differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx_1}{ds} = a_1, \ldots, \frac{dx_n}{ds} = a_n, \quad \frac{du}{ds} = b. \tag{5.5}$$

Merk op dat de laatste vergelijking van (5.5) volgt uit de eerste n vergelijkingen en de d.v. (5.4), aangezien $u(s) = u(x_1(s), \ldots, x_n(s))$:

$$\frac{du}{ds} = u_{x_1}\frac{dx_1}{ds} + \ldots + u_{x_n}\frac{dx_n}{ds} = a_1 u_{x_1} + \ldots + a_n u_{x_n} = b. \tag{5.6}$$

De krommen in het hypervlak $u = 0$ die voldoen aan de eerste n vergelijkingen van (5.5) noemen we *basiskarakteristieken*. Zij zijn de projecties van de karakteristieken op het hypervlak $u = 0$. Uit (5.5) volgt dat door ieder punt van G precies één basiskarakteristiek gaat. Uit (5.6) volgt: als P een punt is op het integraaloppervlak $u = u(\mathbf{x})$, dan ligt de karakteristiek door P geheel op het integraaloppervlak. In het bijzonder geldt dat een integraaloppervlak geheel is samengesteld uit karakteristieken. Omgekeerd is een hyperoppervlak dat is samengesteld uit karakteristieken, een integraaloppervlak. Twee integraaloppervlakken snijden elkaar langs een of meer karakteristieken. Een integraaloppervlak ligt nu eenduidig vast door een oppervlak van dimensie $n-1$ aan te geven dat op het integraaloppervlak ligt en dat nergens raakt aan de karakteristieken. Dit komt overeen met het vastleggen van de waarde van $u(x_1, \ldots, x_n)$ op een hyperoppervlak in het "grondvlak" $u = 0$, dat nergens raakt aan de basiskarakteristieken. Een hyperoppervlak in $u = 0$ dat is samengesteld uit basiskarakteristieken is een karakteristiek hyperoppervlak (in de zin van §5.1): we tonen dit aan voor $n = 2$. De PDV luidt dan $au_x + bu_y = c$ waarbij a, b, c functies zijn van x, y, u. De basiskarakteristieken $(x(s), y(s))$ voldoen aan het stelsel d.v. $x'(s) = a, y'(s) = b$. Beschouw nu een reguliere coördinatentransformatie $(x, y) \to (\xi, \eta)$. Voor $v(\xi, \eta) = u(x, y)$ wordt de d.v. voor v: $(a\xi_x + b\xi_y)v_\xi + (a\eta_x + b\eta_y)v_\eta = c$ waarbij nu a, b, c als functies van ξ, η, v worden opgevat. De kromme $\xi = C$ (constant) is een karakteristieke kromme (d.w.z. een karakteristiek hyperoppervlak in de zin van de vorige paragraaf) als $a\xi_x + b\xi_y = 0$. Anderzijds geldt op een basiskarakteristiek $(x(s), y(s))$ dat $\dfrac{d\xi}{ds} = x'(s)\xi_x + y'(s)\xi_y = a\xi_x + b\xi_y = 0$ dus $\xi =$ constant. De basiskarakteristieken zijn dus precies de krommen $\xi = \xi_0$ waarbij ξ een karakteristieke coördinaat is.

Het is mogelijk om de d.v. (5.4) in een symmetrischer vorm te schrijven door de oplossing $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ te schrijven in de vorm $\psi(x_1, \ldots, x_n, u) = 0$ waarbij $\psi(\mathbf{x}, u) = u(\mathbf{x}) - u$. Omgekeerd, als $\psi(x_1, \ldots, x_n, u) = 0$ en $\psi_u(x_1, \ldots, x_n, u) \neq 0$ voor $(\mathbf{x}, u) \in D \subset \mathbf{R}^{n+1}$, dan kunnen we $u = u(\mathbf{x})$ hieruit oplossen. Dit volgt uit de *impliciete functiestelling*. Als we $u = u(\mathbf{x})$ invullen in $\psi(\mathbf{x}, u) = 0$, dan volgt

$$\psi_{x_1} + \psi_u u_{x_1} = 0, \ldots, \psi_{x_n} + \psi_u u_{x_n} = 0.$$

Voor $\psi_u \neq 0$ is de d.v. (5.4) dan equivalent met de d.v.

$$a_1(\mathbf{x}, u)\psi_{x_1} + \ldots + a_n(\mathbf{x}, u)\psi_{x_n} + b(\mathbf{x}, u)\psi_u = 0 \tag{5.7}$$

De quasilineaire d.v. (5.4) is equivalent met de lineaire d.v. (5.7).

We zullen een paar voorbeelden bekijken en ons beperken tot het geval $n = 2$, waarbij de integraaloppervlakken oppervlakken in $\mathbf{R}^3$ zijn.

Voorbeeld 1: Beschouw de d.v. $au_x + bu_y = 0$ met $a, b \in \mathbf{R}$ en $b \neq 0$ met randvoorwaarde $u(x, 0) = \phi(x)$. De karakteristieken voldoen aan $x'(s) = a,\ y'(s) = b,\ u'(s) = 0$; de karakteristieken zijn dus rechten die niet evenwijdig aan het vlak $y = 0$ lopen en u is constant op een karakteristiek. Verder is op elke basiskarakteristiek $t = -ay + bx$ constant. t is dus een karakteristieke coördinaat. Merk op dat de karakteristieken het vlak $y = 0$ alle snijden. Een parametervoorstelling van het integraaloppervlak is nu te verkrijgen door het stelsel

$$x'(s) = a,\ y'(s) = b,\ u'(s) = 0, \qquad x(0) = t/b,\ y(0) = 0,\ u(0) = \phi(t/b)$$

op te lossen: dit levert

$$x = as + t/b,\ y = bs,\ u = \phi(t/b).$$

Door s, t in x, y uit te drukken verkrijgen we een gesloten vorm voor de oplossing: $u = \phi(x - \frac{a}{b}y)$.

Opmerking: Als we in plaats van de coördinaten x, y coördinaten s, t kiezen (waarbij $t = -ay + bx$ en s een willekeurige onafhankelijke coördinaat is) wordt de d.v. $v_s = 0$ waarbij $v(s,t) = u(x(s,t), y(s,t))$. De algemene oplossing is dus $v(s,t) = f(t) = f(ay - bx)$ met f een willekeurige functie. Om f te bepalen moeten we $u(x, y)$ voorschrijven op een kromme die nergens raakt aan een karakteristiek. Een voorbeeld van zo'n oppervlak is $y = 0$: $u(x, 0) = \phi(x)$ levert de oplossing $u(x, y) = \phi(x - \frac{a}{b}y)$.

Voorbeeld 2: $xu_y - yu_x = cu$ met c een constante. Het punt $(x, y) = (0, 0)$ is uitgesloten van de bovenstaande beschouwingen omdat daar de coëfficiënten van zowel u_x als u_y nul zijn. De vergelijkingen voor de karakteristieken zijn

$$\frac{dx}{ds} = -y, \quad \frac{dy}{ds} = x, \quad \frac{du}{ds} = cu. \tag{5.8}$$

De oplossingen van de eerste twee d.v. leveren de basiskarakteristieken: $\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}$ heeft als oplossing $x^2 + y^2 =$ constant. Een karakteristieke coördinaat is dus $t = \sqrt{x^2 + y^2}$ en de basiskarakteristieken zijn cirkels met middelpunt $(0, 0)$. Verder is er de oplossing $u(0, 0) = 0$. We kunnen dus u voorschrijven op de halfrechte $y = 0, x > 0$: $u(x, 0) = \phi(x)$. Als we $s = 0$ stellen op deze halfrechte dan moeten we dus het stelsel gewone differentiaalvergelijkingen (5.8) oplossen met de randvoorwaarden $x(0) = t, y(0) = 0, u(0) = \phi(t)$. Oplossen geeft (ga na)

$$x(s) = t\cos s,\ y(s) = t\sin s,\ u(s) = \phi(t)e^{cs}.$$

Dit is een parametervoorstelling van het integraaloppervlak. We kunnen de parameters s en t elimineren en vinden zo de oplossing $u(x, y) = \phi(\sqrt{x^2 + y^2})e^{c\arctan(y/x)}$.

Voorbeeld 3: De Burgers vergelijking $u_t + uu_x = 0$ is quasilineair maar niet lineair in u. Hierbij zijn x, t de onafhankelijke coördinaten. De karakteristieken zijn oplossing van het gekoppelde stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dt}{ds} = 1,\ \frac{dx}{ds} = u,\ \frac{du}{ds} = 0.$$

u is dus constant op een karakteristiek, Verder is $t = s + t_0$ en $x = ut + x_0$. De karakteristieken zijn rechten met richtingscoëfficiënt u. De karakteristiek door (x, t) gaat ook door $(x - ut, 0)$. Als we u op de rechte $t = 0$ vastleggen door $u(x, 0) = \phi(x)$ waarbij $\phi(x) \neq 0$ voor $x \in \mathbf{R}$, dan is $u(x, t) = \phi(x - ut)$. We zien dus dat u zowel in het argument van ϕ voorkomt als daarbuiten.
Als $\phi(x)$ op een zeker interval I dalend is, dan snijden de karakteristieken die uitgaan van I elkaar voor $t \geq t_0$. De oplossing wordt dan niet meer gegeven door de boven afgeleide formule. Als

voorbeeld nemen we $\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x < 0 \\ 1-x & \text{als } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{als } x > 1 \end{cases}$. De karakteristieken door $(x_0, 0)$ voor $x_0 < 0$ zijn de lijnen $x = t + x_0$, voor $x_0 > 1$ zijn het de lijnen $x = x_0$; voor $0 \leq x_0 \leq 1$ zijn het de lijnen $x = (1 - x_0)t + x_0$ die een bundel vormen van uitwaaierende lijnen. Voor $t < 1$ is er een continue oplossing: $u(x, t) = 0$ als $x \geq 1$, $u(x, t) = 1$ als $x \leq t$ en voor vaste t en $t \leq x \leq 1$ neemt u lineair af van 1 tot 0. Op $t = 1$ is de functie echter niet langer continu. De waarde van u in $(1, 1)$ is onduidelijk. Ook is voor $t > 1, x > t$ de waarde van u onduidelijk; door elke punt in dit gebied gaan drie karakteristieke krommen met verschillende richtingscoëfficiënt u. Fysisch correspondeert $t = 1$ met de vorming van een schokgolf. Om de oplossing te bepalen in het gebied $t > 1, x > t$ moeten we het begrip *zwakke oplossing* invoeren. Dit geeft de mogelijkheid om een grotere klasse van functies, zelfs niet-continue functies toe te laten als oplossing. Van zo'n zwakke oplossing wordt geëist dat indien deze differentieerbaar is, zij aan de differentiaalvergelijking voldoet.

Definitie: Zij $G \subset \mathbf{R}^2$ een (open) gebied met (stuksgewijs) gladde rand ∂G. u is een functie zodanig dat u en u^2 integreerbaar op G zijn. u heet een zwakke oplossing van de d.v. $u_t + uu_x = 0$ op G indien voor alle continu differentieerbare functies $\phi : G \to \mathbf{R}$ met compacte drager in G (dus $\phi(x, t) = 0$ buiten een compacte verzameling K met $K \subset G$) geldt

$$\int_G \left(u\phi_t + \frac{1}{2}u^2\phi_x \right) dxdt = 0. \tag{5.9}$$

De bovenstaande definitie wordt gemotiveerd door het volgende lemma:

Lemma 5.1: Zij $G \subset \mathbf{R}^2$ een gebied met stuksgewijs gladde rand ∂G en u continu differentieerbaar op G. Dan is $u_t + uu_x = 0$ op G dan en slechts als (5.9) geldt voor elke op G continu differentieerbare functie ϕ met compacte drager.

Opmerking: Merk op dat ϕ hier de rol van een testfunctie vervult, net als in het geval van distributies. In het algemeen kan een zwakke oplossing een distributie zijn.

Schets bewijs: Volgens de integraalstelling van Stokes voor G (zie §7.6) is

$$\int_G \left((u_t + uu_x)\phi + (u\phi_t + \frac{1}{2}u^2\phi_x) \right) dxdt = \int_G \left(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}u^2\phi) + \frac{\partial}{\partial t}(u\phi) \right) dxdt = \int_{\partial G} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u^2\phi \\ u\phi \end{pmatrix} \cdot d\sigma = 0.$$

Hieruit volgt meteen dat u een zwakke oplossing is als u een (klassieke) oplossing is; voor de omgekeerde bewering gebruiken we dat er voldoende testfuncties ϕ zijn zodat uit het feit dat $\int_G \phi(u_t + uu_x)dxdt = 0$ voor elke testfunctie ϕ volgt dat $u_t + uu_x = 0$ op G. $\diamond$

In het algemeen zijn er toch meerdere zwakke oplossingen. De definitie is dus niet restrictief genoeg om een unieke oplossing te kiezen. Om de fysisch juiste te kiezen, moeten dan extra eisen worden opgelegd. Een voorbeeld van zo'n eis is de *entropie-voorwaarde*. We kunnen hier nu niet verder op ingaan.

Opmerking 1. Laat G een Liegroep van transformaties op (een deel D van) $\mathbf{R}^n$ zijn. G werkt op $\mathbf{R}^n$ en op de ruimte $V = \mathcal{D}(D)$ van op D differentieerbare functies via $f \to g \cdot f$ waarbij $(g \cdot f)(\mathbf{x}) = f(g^{-1}(\mathbf{x}))$. (Dit geeft een *representatie* van G, zie hoofdstuk 8 en 9.) Voor de rotatiegroep $SO(2)$ op $\mathbf{R}^2$ is $g(x, y) = (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$ en $(g \cdot f)(x, y) = f(x \cos\theta + y \sin\theta, x \sin\theta - y \cos\theta)$ voor zekere $\theta \in \mathbf{R}$. Een infinitesimale rotatie (met $\theta =: \delta\theta$ infinitesimaal klein) beeldt $f(x, y)$ af op $f(x + \delta\theta y, y - \delta\theta x) = f(x, y) + \delta\theta X f(x, y)$ waarbij $X = (y\partial_x - x\partial_y)$ een *infinitesimale voortbrenger* van G (preciezer: de representatie van G op de functieruimte V) is. Een functie $f \in V$ is *invariant* onder G als $g \cdot f = f$ voor alle $g \in G$. Dit is precies het geval als $Xf = 0$ voor alle infinitesimale voortbrengers $X = \xi_1(\mathbf{x})\partial_{x_1} + \ldots + \xi_n(\mathbf{x})\partial_{x_n}$ van G. Dit geeft een systeem van PDV van orde 1. Zo zien we uit voorbeeld 2 dat alle functies van $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ die invariant zijn onder rotaties om de oorsprong alleen van $x^2 + y^2$ afhangen.

Opmerking 2. Karakteristieken en systemen van PDV. De theorie van karakteristieken is eveneens van toepassing op systemen van 1e orde PDV. Deze zijn in vectornotatie te schrijven als

$$A_1(\mathbf{x})\mathbf{u}_{x_1}(\mathbf{x}) + \ldots + A_n(\mathbf{x})\mathbf{u}_{x_n}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in D \subset \mathbf{R}^n. \tag{5.10}$$

waarbij $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_k)^T$ een vector van functies is en $A_1(\mathbf{x}), \ldots, A_n(\mathbf{x})$ $k \times k$-matrices zijn. Beschouw het geval $n = 2$ en laat $x = x_1, y = x_2$ zijn. Onder de reguliere coördinatentransformatie $(x, y) \to (\xi, \eta)$ gaat $A_1\mathbf{u}_x + A_2\mathbf{u}_y$ over in $(A_1\xi_x + A_2\xi_y)\mathbf{v}_\xi + (A_1\eta_x + A_2\eta_y)\mathbf{v}_\eta$ waarbij $\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{v}(\xi, \eta)$. Als de matrix $A_1\xi_x + A_2\xi_y$ inverteerbaar is, dan kunnen we deze matrix inverteren en we krijgen dan een Cauchyprobleem als we $\mathbf{v}(\xi_0, \eta)$ voorschrijven voor vaste ξ_0. Als de matrix echter niet inverteerbaar is voor alle ξ kunnen we $\mathbf{v}(\xi, \eta)$ niet bepalen uit (5.10) en $\mathbf{v}(\xi_0, \eta)$. De krommen $\xi=$ constant zijn dan *karakteristieken* (en ξ een karakteristieke coördinaat). De karakteristieke coördinaten $\xi(x, y)$ zijn dus de oplossingen van

$$\det(A_1\xi_x + A_2\xi_y) = 0. \tag{5.11}$$

Voor $n > 2$ gaat het analoog. Het systeem (5.10) heet *hyperbolisch* als er k onafhankelijke karakteristieke coördinaten zijn.

Voorbeeld. De stroming van een adiabatisch gas. De stroming van een adiabatisch gas kan worden bepaald uit de macroscopische vergelijkingen voor de stromingssnelheid $u = u(\mathbf{x})$, de dichtheid van het gas $\rho = \rho(\mathbf{x})$ en de druk $p = p(\mathbf{x})$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{5.12a}$$

samen met de toestandsvergelijking $p = p(\rho)$ (in het geval van een ideaal gas is $p = C\rho^\gamma$ voor $\gamma = c_P/c_V$). De eerste vergelijking van (5.12a) is de continuïteitsvergelijking die uitdrukt dat er geen massa verloren gaat, en de tweede vergelijking - de vergelijking van Euler - is een vergelijking voor impulsbalans, in feite de tweede wet van Newton. Als we ons beperken tot één dimensie en $\dfrac{dp}{d\rho} = c^2$ schrijven dan gaat het stelsel (5.12a) over in het quasilineaire stelsel

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \qquad u_t + uu_x + \frac{c^2}{\rho}\rho_x = 0. \tag{5.12b}$$

Dit stelsel is te schrijven in de vorm (5.10) als we schrijven $\mathbf{u} = (u, \rho)^T$, $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $A_2 = \begin{pmatrix} u & c^2/\rho \\ \rho & u \end{pmatrix}$. De vergelijkingen voor de karakteristieken vinden we uit

$$\begin{vmatrix} \xi_t + u\xi_x & \frac{c^2}{\rho}\xi_x \\ \rho\xi_x & \xi_t + u\xi_x \end{vmatrix} = (\xi_t + u\xi_x)^2 - c^2\xi_x^2 = 0$$

zodat $\xi_t + (u \pm c)\xi_x = 0$. Op de karakteristieken $\xi = (\xi(x(s), t(s)) = \xi_0$ is $\xi_x x'(s) + \xi_t t'(s) = 0$ dus $\dfrac{dx}{dt} = u \pm c$. De karakteristieken geven de richting (in het (x, t)-vlak) aan waarin een verstoring zich voortplant. Verstoringen zijn in dit verband op te vatten als geluidsgolven en $u \pm c$

is de geluidssnelheid. Bij de golfvergelijking zullen we eveneens zien dat de karakteristieken de richtingen aangeven waarin de golf zich voortplant, m.a.w. de karakteristieken zijn op te vatten als *(licht)stralen.*

§**5.3. Lineaire partiële differentiaalvergelijkingen van tweede orde. Klassificatie.**

Een lineaire PDV van tweede orde heeft de vorm

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x})u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{x})u_{x_i} + cu(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \tag{5.13}$$

We beschouwen het geval dat de coëfficiënten a_{ij}, b_i, c constant zijn. We kunnen verder aannemen dat $a_{ij} = a_{ji}$. We voeren een coordinatentransformatie uit zodat het linkerlid van de d.v. $L(u)$ een zo eenvoudig mogelijke vorm krijgt. Hiertoe noteren we

$$\mathbf{x} = (x_1 \dots x_n)^T, \qquad \nabla_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^T$$

en analoog voor $\mathbf{y}$, ∇_y. ∇_x is dus een vector van differentiaaloperatoren. We kunnen nu

$$L(u) = (\nabla_x^T A \nabla_x + \mathbf{b}^T \nabla_x + c)u$$

schrijven, waarbij A een symmetrische matrix is, en $\mathbf{b}$ een vector in $\mathbf{R}^n$. De term $\nabla_x^T A \nabla_x u$ wordt wel het *hoofddeel* van $L(u)$ genoemd. Nu bestaat er een matrix $U = OD'$ zodanig dat $D = U^T A U = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$ een diagonaalmatrix is met $1, -1$ en 0 op de hoofddiagonaal. De matrix U is het product van een orthogonale matrix O zodanig dat $O^T A O$ een diagonaalmatrix is, en een diagonaalmatrix D' met positieve getallen op de diagonaal. Laat nu $\mathbf{y} = U^T \mathbf{x}$, dan is $\nabla_x = U \nabla_y$ en

$$L(u) = (\nabla_y^T D \nabla_y + \mathbf{d}^T \nabla_y + c)u, \qquad \nabla_y^T D \nabla_y u = \sum_{i=1}^{k} u_{y_iy_i} - \sum_{i=k+1}^{\ell} u_{y_iy_i}$$

waarbij $U^T \mathbf{b} = \mathbf{d}$. Laat nu $\mathbf{d} = (d_1 d_2 \dots d_n)^T$, en $\beta = (d_1 \dots d_k - d_{k+1} \dots - d_\ell 0 \dots 0)$. Definieer $f(\mathbf{y}) = e^{\beta^T \mathbf{y}/2}$ en $v = fu$. Dan is $L(u) = f(\mathbf{y})^{-1} \tilde{L}(v)$ met

$$\tilde{L}(v) = \sum_{i=1}^{k} v_{y_iy_i} - \sum_{i=k+1}^{\ell} v_{y_iy_i} + \sum_{i=\ell+1}^{n} \alpha_i v_{y_i} + \gamma v.$$

Tenslotte, als $\ell < n$ en niet alle α_i nul zijn, dan (zeg dat $\alpha_n \neq 0$) indien

$$t = y_n/\alpha_n, \quad t_i = y_i - \alpha_i y_n/\alpha_n, \qquad v(y_1, \dots, y_n) = w(y_1, \dots, y_\ell, t_{\ell+1}, \dots, t_{n-1}, t)$$

dan is $w_{y_iy_i} = v_{y_iy_i}$ voor $1 \le i \le \ell$ en $w_t = \sum_{i=\ell+1}^{n} \alpha_i v_{y_i}$, zodat de d.v. (5.13) de vorm

$$\sum_{i=1}^{k} w_{y_iy_i} - \sum_{i=k+1}^{\ell} w_{y_iy_i} + (w_t) + \lambda w = g(\mathbf{y}, \mathbf{t}) \tag{5.13$'$}$$

krijgt. Als $\ell = n$ komt de term w_t niet voor; als $\ell < n$ kan de term w_t al dan niet voorkomen. λ is een reële constante.

De d.v. (5.13) heet *elliptisch* als $\ell = n$ en $k = n$ of $k = 0$. Het linkerlid van (5.13') heeft dan de vorm $\Delta u + \lambda u$ waarbij Δ de Laplaciaan is en $\lambda \in \mathbf{R}$. De d.v. $\Delta u = 0$ heet de d.v. van Laplace; de d.v. van Laplace met inhomogene term $\Delta u = g$ heet ook wel de d.v. van Poisson. De d.v. $\Delta u + \lambda u = 0$ heet de d.v. van Helmholtz.

(5.13) heet *ultrahyperbolisch* als $\ell = n$ en $0 < k < n$ en *hyperbolisch* als $k = n - 1$. Een voorbeeld is de golfvergelijking $u_{tt} - \Delta u = 0$ waarbij de d.v. afhangt van $x_1, \ldots, x_n$ en t en $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$.
Een algemener voorbeeld is de *telegraafvergelijking* $\Delta u = Au_{tt} + Bu_t + Cu$ voor $A > 0$. Zoals we boven gezien hebben kunnen we d.m.v. een transformatie van u bereiken dat $B = 0$; door een extra dimensie toe te voegen kunnen we tevens ervoor zorgen dat $C = 0$: laat z een onafhankelijke coördinaat zijn en laat $v = ue^{bz}$. v is dus en functie van $x_1, \ldots, x_n, t, z$ en $\Delta v = (\Delta u + b^2 u)e^{bz}$. Als we $b^2 = C/A$ kiezen dan voldoet v aan de $n+1$-dimensionale golfvergelijking $v_{tt} = c^2 \Delta v$.

(5.13) heet *parabolisch* als $0 < \ell < n$; een voorbeeld is de warmte- of diffusievergelijking $u_t - \Delta u = 0$ waarbij u van $x_1, \ldots, x_n$ en t afhangt.

In het geval dat $n = 2$, is de d.v. (5.13) elliptisch, hyperbolisch resp. parabolisch als de determinant van de matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ positief, negatief, resp. nul is.

Het type van de d.v. hangt alleen af van het hoofddeel. Indien de coëfficiënten niet constant, maar functies zijn, kan het hoofddeel nog steeds op diagonaalvorm worden gebracht; het type kan nu echter variëren met de positie $\mathbf{x}$.

Het onderscheid tussen de verschillende typen is essentieel. Zo hoort bij ieder type een geschikt type randvoorwaarde opdat het systeem "goed gesteld" is. Zonder bewijs merken we op:

i. Voor een hyperbolische d.v. met hoofddeel $u_{tt} - \Delta u$ zijn geschikte randvoorwaarden Cauchy-randvoorwaarden op een open hyperoppervlak $t = 0$ (waarbij $u(\mathbf{x}, 0)$ en $u_t(\mathbf{x}, 0)$ zijn voorgeschreven).
ii. Voor een elliptische d.v. zijn geschikte randvoorwaarden: (a.) *Dirichlet-randvoorwaarden:* de waarden van $u(\mathbf{x})$ op een (gesloten) hyperoppervlak zijn gegeven. (b.) *Neumann-randvoorwaarden:* De waarden van de normale afgeleide $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ op een (gesloten) hyperoppervlak zijn gegeven. (c.) *gemengde randvoorwaarden*, waarbij de waarde van $Au(\mathbf{x}) + B\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(\mathbf{x})$ voor zekere $A, B \neq 0$ op een gesloten hyperoppervlak gegeven zijn.
iii. Voor een parabolische d.v. zijn geschikte randvoorwaarden Dirichlet-, Neumann- of gemengde randvoorwaarden op een open hyperoppervlak.

Voorbeeld 1: In het geval van een gewone d.v. van orde 2 op $G = [a, b]$ zijn Cauchy-randvoorwaarden van de vorm $u(a) = c_1, u'(a) = c_2$. Dirichlet- en Neumannvoorwaarden (evenals gemengde voorwaarden) zijn we bij Sturm-Liouvillesystemen tegengekomen; zo zijn Dirichlet-randvoorwaarden van de vorm $u(a) = c_1, u(b) = c_2$ en Neumann-randvoorwaarden zijn $u'(a) = c_1, u'(b) = c_2$). Een Sturm-Liouvillesysteem is natuurlijk geen voorbeeld van een PDV, maar een gewone d.v.; de differentiaalvergelijking is op te vatten als een elliptische d.v. met $n = 1$. We zullen in de volgende paragraaf aantonen dat de oplossing van de elliptische d.v. $\Delta u = 0$ op een begrensd gebied G met rand ∂G bepaald is door de waarden van u op ∂G voor te schrijven.

Voorbeeld 2: Beschouw de hyperbolische d.v. $u_{xy} = 0$ met Dirichlet-randvoorwaarden op het vierkant $0 < x < 1, 0 < y < 1$. Oplossingen zijn $u(x, y) = f(x) + g(y)$ met f, g willekeurige (differentieerbare) functies. Nu ligt $f(x)$ bijna geheel (op een constante na) vast als we $u(x, 0)$

voorschrijven en $g(y)$ ligt (eveneens op een constante na) vast als we $u(0,y)$ voorschrijven. Het is dus niet meer mogelijk om $u(x,1)$ resp. $u(1,y)$ voor te schrijven.

Opmerking. Één enkele PDV van orde twee kan worden omgezet in een systeem van 1e orde PDV door de afgeleiden u_x etc. als onafhankelijke functies op te vatten. Soms kunnen we het aantal onafhankelijke functies nog verkleinen door een geschikte keuze. Zo is de 2e-orde vergelijking $u_{tt} - u_{xx} = 0$ equivalent aan het systeem $\begin{cases} u_x - v_t = 0, \\ u_t - v_x = 0 \end{cases}$. Ga na dat dit systeem hyperbolisch is en dat de karakteristieken $x - t = c_1$, $x + t = c_2$ dezelfde zijn als voor de vergelijking $u_{tt} - u_{xx} = 0$.

5.4. De diffusievergelijking.

We beschouwen de diffusievergelijking in n dimensies

$$u_t = k\Delta u \quad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, t > 0) \qquad u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}) \tag{5.14}$$

waarbij $u = u(\mathbf{x}, t)$ eenmaal naar t en tweemaal naar x_i differentieerbaar is voor $t > 0$ en continu is voor $t \geq 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}$. $f(\mathbf{x})$ is een continue functie.

We bepalen een oplossing m.b.v. Fouriertransformatie. We gaan hier niet in op Fouriertransformaties maar volstaan met het noemen van een paar eigenschappen. De *Fouriergetransformeerde* van een absoluut integreerbare functie $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ is gedefinieerd als

$$\mathcal{F}(f)(\mathbf{y}) := \hat{f}(\mathbf{y}) = \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}} d^n\mathbf{x}.$$

Als f een voldoende gladde functie is geldt de omkeerformule: $f(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{(2\pi)^n} \displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\mathbf{y}) e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}} d^n\mathbf{y}$.
Verder geldt dat als f en g absoluut integreerbare functies zijn, dan is de convolutie $f * g(\mathbf{x}) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{t}) g(\mathbf{x} - \mathbf{t}) d^n\mathbf{t}$ absoluut integreerbaar en voor de Fouriergetransformeerde geldt

$$\mathcal{F}(f * g)(\mathbf{y}) = \mathcal{F}(f)(\mathbf{y}) \mathcal{F}(g)(\mathbf{y}).$$

Verder is $\mathcal{F}(f_{x_i}) = iy_i \mathcal{F}(f)$ en dus $\mathcal{F}(\Delta f) = -\mathbf{y}^2 \mathcal{F}(f)$, waarbij $\mathbf{y}^2 = y_1^2 + \ldots + y_n^2 = \|\mathbf{y}\|^2$.
We passen nu Fouriertransformatie (naar $\mathbf{x}$; t laten we hierbij vast) toe op (5.14). We nemen hierbij aan dat de Fouriergetransformeerde $\hat{f}$ van f ook gedefinieerd is. Dit geeft, met $\hat{u} = \hat{u}(\mathbf{y}, t)$

$$\hat{u}_t = -k\mathbf{y}^2 \hat{u}, \qquad \hat{u}(\mathbf{y}, 0) = \hat{f}(\mathbf{y}).$$

De oplossing van deze eerste-orde gewone d.v. is

$$\hat{u}(\mathbf{y}, t) = \hat{f}(\mathbf{y}) e^{-k\mathbf{y}^2 t}.$$

De Fouriergetransformeerde van de oplossing is een product en de oplossing u is dus de convolutie van $f(\mathbf{x})$ en de inverse Fourier-getransformeerde van de e-macht. Deze berekenen we m.b.v. de omkeerformule:

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-k\mathbf{y}^2 t}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-k\mathbf{y}^2 t + i\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}} d^n\mathbf{y} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-k\mathbf{y}_i^2 t + ix_i y_i} dy_i = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-ky^2 t + ixy} dy \right)^n$$

$$= \left(\frac{e^{-x^2/4kt}}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-kt(y-ix/2kt)^2} dy \right)^n = \left(\frac{e^{-x^2/4kt}}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-kty^2} dy \right)^n = \frac{1}{(4\pi kt)^{n/2}} e^{-\mathbf{x}^2/4kt}.$$

Nu is

$$u(\mathbf{x}, t) = f * \frac{1}{(4\pi kt)^{n/2}} e^{-\mathbf{x}^2/4kt} = \frac{1}{(4\pi kt)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}} f(\mathbf{t}) e^{-\|\mathbf{x}-\mathbf{t}\|^2/4kt}. \tag{5.15}$$

De oplossingsformule is ook geldig in het geval dat de Fouriergetransformeerde van f niet gedefinieerd is. We moeten controleren dat $u(\mathbf{x}, t)$ in (5.15) aan de d.v. $u_t = k\Delta u$ voldoet en dat $\lim_{t \downarrow 0} u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x})$. Dat u aan de diffusievergelijking (5.14) voldoet is eenvoudig na te gaan; dat aan de randvoorwaarde is voldaan eveneens, maar het feit dat $u(\mathbf{x}, t)$ continu is in $t = 0$ is iets meer werk; we laten dit achterwege. In feite kan worden aangetoond dat $\lim_{t \downarrow 0} u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x})$ ook als f stuksgwijs continu is op $\mathbf{R}$ voor die $\mathbf{x}$ waar f continu is.

Opmerkingen: 1. De algemene oplossing van (5.14) is een convolutie van de randwaardefunctie f en de *fundamentele oplossing* $u_0(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi kt)^{n/2}} e^{-\|\mathbf{x}\|^2/4kt}$. Deze laatste oplossing is een oplossing van (5.14) met randvoorwaarde $u(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x})$.

2. Voor de oplossing geldt dat $\int_{\mathbf{R}} u(\mathbf{x}, t) d^n\mathbf{x} = \hat{u}(\mathbf{0}, t) = 1$ terwijl $\lim_{t \to \infty} u(\mathbf{x}, t) = 0$ uniform op $\mathbf{R}^n$. Als we $u(\mathbf{x}, t)$ interpreteren als een concentratie van een stof op positie $\mathbf{x}$ en tijdstip t, dan betekent dit dat de totale hoeveelheid stof altijd gelijk belijft, maar dat de concentratie in elk punt naar 0 gaat. Dit is wat te verwachten is voor een diffusieproces.

§5.5. Het elliptische geval: de vergelijking van Laplace.

Als voorbeeld van een elliptische 2e orde d.v. bekijken we de vergelijking van Laplace $\Delta u = 0$ en de inhomogene variant $\Delta u = f$, de vergelijking van Poisson. In deze paragraaf is $G \subset \mathbf{R}^n$ een gebied met stuksgewijs gladde rand ∂G (een *gebied* is een open samenhangende verzameling). Een functie die in G aan de d.v. van Laplace voldoet heet *harmonisch* in G. Er zijn twee typen randwaardeproblemen die vaak voorkomen:

1. Bij het *Dirichletprobleem* wordt een functie gezocht die harmonisch is in een gebied G, continu op de afsluiting $\bar{G} = G \cup \partial G$ en die op de rand ∂G voorgeschreven waarden aanneemt.

2. Het *Neumannprobleem*, waarbij weer een functie u wordt gezocht die harmonisch is op G en continu op $\bar{G}$, maar waarbij nu niet de waarde van u op ∂G is voorgeschreven, maar de normale afgeleide $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ - dit is de richtingsafgeleide van u in de richting van de uitwendige normaal $\mathbf{n}$ op ∂G, d.w.z. $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \mathbf{n}$.

Het Dirichletprobleem zijn we reeds tegengekomen in voorbeeld 2 van §4.5, waar de methode van scheiden van variabelen wordt toegepast om het probleem te herleiden tot het oplossen van een of meer Sturm-Liouvilleproblemen. De oplossing kan dan worden geschreven in de vorm van een Fourierreeks. Om deze methode te kunnen gebruiken moeten we coördinaten gebruiken die zijn aangepast aan het gebied G - Cartesische coördinaten voor een rechthoek, een kwadrant of een halfvlak resp. halfruimte, poolcoördinaten voor een cirkelschijf, etc. Voor veel gebieden zijn speciale, dikwijls orthogonale, coördinatensystemen bekend. We zullen ons hier echter concentreren op een andere oplossingsmethode, nl. m.b.v. Greense functies. M.b.v. Greense functies kunnen we tevens een oplossing voor het randwaardenprobleem $\Delta u = f$ met $u = 0$ op ∂G bepalen. Centraal zijn hierbij twee identiteiten die bekend staan als de *formules van Green* en die voor de Laplace-operator de analoga zijn van de Lagrange-identiteit (4.1).

Propositie 5.2: Zij $G \subset \mathbf{R}^n$ een begrensd gebied zijn met een stuksgewijs gladde rand ∂G en laat $u, v : \bar{G} \to \mathbf{R}$ in G tweemaal continu differentieerbare functies die continu zijn op $\bar{G} = G \cup \partial G$. Dan geldt *de eerste formule van Green*:

$$\int_G (\nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v) d^n\mathbf{x} = \oint_{\partial G} u \frac{\partial v}{\partial n} d^{n-1}A \tag{5.14}$$

waarbij $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ de uitwendige normaal op ∂G is in $\mathbf{x}$ en $\frac{\partial}{\partial n}$ de richtingsafgeleide is in de richting van $\mathbf{n}$. Verder geldt de *tweede formule van Green*:

$$\int_G (u\Delta v - v\Delta u) d^n\mathbf{x} = \oint_{\partial G} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}) d^{n-1}A. \tag{5.15}$$

Bewijs: Op G geldt voor een differentieerbaar vectorveld $\mathbf{w}$ de integraalstelling van Gausz (zie ook §7.6):

$$\oint_{\partial G} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}\; d^{n-1}A = \int_G \mathrm{div}(\mathbf{w}) d^n\mathbf{x}. \tag{5.16}$$

Toepassen van (5.16) op $\mathbf{w} = u\nabla v$ levert (5.14). Als we in (5.14) de rollen van u en v verwisselen en de beide identiteiten van elkaar aftrekken, verkrijgen we (5.15). $\diamond$

Fundamentele oplossingen. We zoeken een zo eenvoudig mogelijke functie die voldoet aan de d.v. van Laplace op $\mathbf{R}^n$. Laat $r = \|\mathbf{x}\|$; harmonische functies $u = u(r)$ die alleen van r afhangen voldoen aan

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r = 0.$$

Oplossen levert $u_r = \dfrac{A'}{r^{n-1}}$ en dus $u(r) = \dfrac{A}{r^{n-2}} + B$ voor $n > 2$ en $u(r) = A \ln r + B$ voor $n = 2$ waarbij A', A, B constanten zijn. $A = 0$ kiezen levert een constante functie, $A = 1, B = 0$ kiezen levert de *fundamentele oplossingen* u_f van de d.v. van Laplace:

$$u_f(\mathbf{x}) = \ln \|\mathbf{x}\| \quad \text{voor } n = 2, \qquad u_f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^{-n+2} \quad \text{voor } n > 2.$$

$u_f(\mathbf{x})$ is harmonisch buiten $\mathbf{x} = \mathbf{0}$; We zullen zien dat in feite geldt dat (voor $n > 2$)

$$\Delta u_f = -(n-2)\Omega_n \delta(\mathbf{x})$$

waarbij Ω_n de $(n-1)$-dimensionale oppervlakte van de eenheidsbol in $\mathbf{R}^n$ is; in het geval $n = 2$ is $\Delta u_f = 2\pi\delta(\mathbf{x})$. We schrijven in het vervolg ook $u_f(\|\mathbf{x}\|)$ voor $u_f(\mathbf{x})$.

Kies een vast punt $\mathbf{y} \in G$. We passen de tweede formule van Green toe op een willekeurige (op G tweemaal differentieerbare) functie u en $v = u_f(r)$, waarbij $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Aangezien Δv in $\mathbf{y}$ niet gedefinieerd is, nemen we in (5.15) i.p.v. het gehele gebied G het gebied G met uitzondering van een bol $S_\epsilon = \{\mathbf{x} \in G : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq \epsilon\}$. Hierbij is $\epsilon > 0$ zo klein dat S_ϵ geheel binnen G ligt. De rand van het gebied $G - S_\epsilon$ bestaat dan uit twee stukken: de rand ∂G van G samen met de rand ∂S_ϵ waar de uitwendige normaal naar binnen wijst, m.a.w. $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}$. Nu is $\Delta v = 0$ op $G - S_\epsilon$ en (5.15) geeft dan (we nemen het geval $n > 2$)

$$-\int_{G-S_\epsilon} \frac{\Delta u}{r^{n-2}} d^n\mathbf{x} = \oint_{\partial G} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) - \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d^{n-1}A - \oint_{\partial S_\epsilon} \left(u \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) - \frac{1}{\epsilon^{n-2}} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \epsilon^{n-1} d\Omega, \tag{5.17}$$

waarbij $d\Omega$ de oppervlaktevorm op de bol is. Als we nu ϵ naar 0 laten gaan dan gaat de rechter integraal naar $(n-2)\Omega_n u(\mathbf{y})$ en dus is

$$u(\mathbf{y}) = \frac{1}{(n-2)\Omega_n} \left(-\int_G \frac{\Delta u}{r^{n-2}} d^n\mathbf{x} + \oint_{\partial G} \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u}{\partial n} d^{n-1}A - \oint_{\partial G} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) d^{n-1}A \right). \tag{5.18}$$

Voor $G \subset \mathbf{R}^2$ vinden we analoog

$$u(\mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \int_G \ln r \Delta u d^2\mathbf{x} - \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial G} \ln r \frac{\partial u}{\partial n} dA + \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial G} u \frac{\partial \ln r}{\partial n} dA. \tag{5.18$'$}$$

Als we $G = \mathbf{R}^n$ en $\Delta u = \delta(\mathbf{x})$ kiezen, vinden we dat $-(n-2)\Omega_n u(\mathbf{y}) = u_f(\mathbf{y})$ (voor $n = 2$ is $2\pi u(\mathbf{y}) = u_f(\mathbf{y})$). M.a.w.,

$$\Delta u_f(\mathbf{x}) = -(n-2)\Omega_n \delta(\mathbf{x}) \quad (n > 2) \quad \text{resp.} \quad \Delta u_f(r) = 2\pi\delta(\mathbf{x}) \quad (n = 2). \tag{5.18$''$}$$

Opmerking 1: Indien $\mathbf{y}$ buiten $\bar{G}$ ligt, dan is het uitsluiten van een bol S_ϵ niet nodig; in (5.17) komt dan de term met $\oint_{\partial S_\epsilon}$ niet voor. In dit geval is het linkerlid in (5.18) en (5.18') nul.

Opmerking 2: Als we $G = \{\|\mathbf{x}\| < R\}$ nemen en $R \to \infty$ laten gaan dan geeft (5.18), (5.18') een oplossing voor de vergelijking van Poisson $\Delta u = f$ op $\mathbf{R}^n$ voor het geval dat zowel f als u en $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ snel genoeg naar 0 gaan (als $R \to \infty$): voor $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$ is dan

$$u(\mathbf{y}) = -\frac{1}{(n-2)\Omega_n} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{n-2}} d^n\mathbf{x} \quad (n > 2), \text{ en } u(\mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} f(\mathbf{x}) \ln(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) d^2\mathbf{x} \quad (n = 2). \tag{5.19}$$

Indien f en de waarden van zowel u als $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ op ∂G gegeven zijn, levert formule (5.18), resp. (5.18') een oplossingsformule voor $u(\mathbf{y})$ met $\mathbf{y} \in G$. In het algemeen kunnen echter de waarden van u en de normale afgeleide niet onafhankelijk van elkaar gegeven worden:

Propositie 5.3: Laat u_1, u_2 oplossingen zijn van de vergelijking van Poisson met Dirichlet-randvoorwaarden

$$\Delta u = f \quad \text{op } G, \qquad u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \text{ voor } \mathbf{x} \in \partial G.$$

Dan is $u_1 = u_2$.

Laat u_1, u_2 oplossingen zijn van de vergelijking van Poisson met Neumann-randvoorwaarden

$$\Delta u = f \quad \text{op } G, \qquad \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) \text{ voor } \mathbf{x} \in \partial G.$$

Dan is $u_1 - u_2$ constant. Verder heeft de vergelijking van Poisson met Neumann-randvoorwaarden alleen een oplossing indien $\displaystyle\oint_{\partial G} h(\mathbf{x}) d^{n-1}A = \int_G f(\mathbf{x}) d^n\mathbf{x}$.

Bewijs: Laat $v = u_1 - u_2$. Dan is $\Delta v = 0$ op G en $v(\mathbf{x}) = 0$ voor $\mathbf{x} \in \partial G$. Uit (5.14) volgt dan dat $\displaystyle\int_G (\nabla v)^2 d^n\mathbf{x} = 0$. Maar dan is $\nabla v = \mathbf{0}$, dus v is constant op G. In het geval van Dirichlet-randvoorwaarden is $v = 0$ op ∂G. Omdat v continu is op $\bar{G}$ is dan $v = 0$ en dus $u_1 = u_2$ op G. In het geval van Neumann-randvoorwaarden vinden we eveneens dat $v = u_1 - u_2$ constant is. In dit geval kunnen we echter niet concluderen dat $v = 0$. De laatste bewering volgt direct door in (5.15) $v = 1$ te kiezen. $\diamond$

We gaan nu proberen om de oplossingsformules (5.18), (5.18') zo aan te passen dat een van de integralen nul wordt, zodat we een oplossingsformule verkrijgen waar alleen de Dirichlet- of alleen de Neumann-randvoorwaarden in voorkomen. We beschouwen het geval van Dirichlet-randvoorwaarden. Laat $\mathbf{y} \in G$. We zoeken een functie $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ die een som is van de fundamentele oplossing $u_f(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)$ en een op G harmonische functie $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ die tevens continu is op $\bar{G}$, zodanig dat $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ voor $\mathbf{x} \in \partial G$. $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ heet een *Greense functie* bij de vergelijking van Laplace op G. Indien zo'n functie bestaat, volgt, geheel analoog aan de afleiding van (5.18), dat

$$u(\mathbf{y}) = \frac{1}{(n-2)\Omega_n}\left(-\int_G \Delta u(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d^n\mathbf{x} + \oint_{\partial G} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial n} d^{n-1}A - \oint_{\partial G} u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d^{n-1}A\right)$$

dus

$$u(\mathbf{y}) = -\frac{1}{(n-2)\Omega_n}\left(\int_G \Delta u(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d^n\mathbf{x} + \oint_{\partial G} u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d^{n-1}A\right) \tag{5.20}$$

waarbij voor $n = 2$ de factor $\dfrac{1}{(n-2)\Omega_n}$ wordt vervangen door $-\dfrac{1}{2\pi}$.

Voor een willekeurig gebied is het niet mogelijk om een Greense functie te bepalen. Dit lukt wel voor speciale gebieden: we bepalen een Greense functie voor het geval dat G een halfvlak (resp. halfruimte) of een cirkelschijf (resp. het inwendige van een bol) in $\mathbf{R}^2$ (resp. $\mathbf{R}^n$) is. We nemen eerst voor G het halfvlak of de halfruimte $x^1 > 0$. Laat $\mathbf{y} = (y^1, y^2, \ldots, y^n) \in G$. We spiegelen $\mathbf{y}$ in ∂G; dit geeft het punt $\mathbf{y}^* = (-y^1, y^2, \ldots, y^n)$. Laat nu $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u_f(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) - u_f(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}^*\|)$. Omdat $\mathbf{y}^*$ buiten $\bar{G}$ ligt, is $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ inderdaad een Greense functie. We bepalen de vorm van de oplossingsformule voor het geval dat $n = 2$. In dit geval is op $x^1 = 0$: $\dfrac{\partial G}{\partial n} = -\dfrac{\partial G}{\partial x^1}$. De oplossing van het Dirichletprobleem

$$\Delta u(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{voor } \mathbf{x} = (x^1, x^2),\ x^1 > 0, \quad u(0, x^2) = g(x^2)$$

wordt dus gegeven door

$$u(\mathbf{y}) = u(y_1, y_2) = \frac{y_1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)dx}{y_1^2 + (x - y_2)^2} \tag{5.21}$$

waarbij we aannemen dat $g(x) \to 0$ voldoende snel als $x \to \infty$. (5.21) wordt wel de *formule van Schwarz* genoemd. Deze methode om G te bepalen heet het *spiegelingsprincipe* (Engels: *method of images*).

Ook voor de cirkelschijf resp. bol $G = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \|\mathbf{x}\| < R\}$ kunnen we een spiegelingsprincipe toepassen. Dit berust op het volgende feit:

Lemma 5.4: Laat $\mathbf{y}$ een punt in G zijn. Laat $\mathbf{y}^* = \dfrac{R^2}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{y}$. Dan is $\|\mathbf{y}^*\| > R$, m.a.w. $\mathbf{y}^*$ ligt buiten $\bar{G}$ en verder is voor elke $\mathbf{x} \in \partial G$: $\dfrac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}^*\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} = \dfrac{R}{\|\mathbf{y}\|}$.

Bewijs: Omdat voor een vaste $\mathbf{x}$ de punten $\mathbf{0}, \mathbf{y}, \mathbf{y}^*$ en $\mathbf{x}$ in een vlak liggen is het voldoende om het bewijs voor een cirkel in $\mathbf{R}^2$ te geven. We beschouwen $\mathbf{R}^2$ als het complexe vlak en laten $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}^*$ corresponderen met de punten z, w en $R^2/\bar{w}$. Dan is

$$\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}^*\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} = \frac{|z - R^2/\bar{w}|}{|z - w|} = \frac{R|\bar{w}z - R^2|}{|R^2 - w\bar{z}||\bar{w}|} = \frac{R}{|w|} = \frac{R}{\|\mathbf{y}\|}. \quad \diamond$$

Uit lemma 5.4 volgt dat voor $n = 3$ de functie $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \dfrac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} - \dfrac{R}{\|\mathbf{y}\|\|\mathbf{x} - \mathbf{y}^*\|}$ een Greense functie voor de Laplace-operator op G is. Voor $n = 2$ wordt een Greense functie gegeven door $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \ln \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| - \ln \|\mathbf{x} - \mathbf{y}^*\| - \ln\left(\dfrac{\|\mathbf{y}\|}{R}\right)$. Als we dit invullen in (5.20) vinden we een oplossingsformule voor het Dirichletprobleem; dit is (de *formule van Poisson*). Voor $n = 2$ luidt de formule van Poisson voor een harmonische functie u op de cirkelschijf $G = \{\|\mathbf{x}\| = R\}$:

$$u(\mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} u(\mathbf{x}) \frac{\|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \phi) \frac{R^2 - \|\mathbf{y}\|^2}{R^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2R\|\mathbf{y}\| \cos(\phi - \psi)} d\phi \tag{5.22}$$

waarbij ψ de hoek is tussen de vector $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ en de positieve x-as.

Bewijs: Omdat $\Delta u = 0$ op G is volgens (5.17) $u(\mathbf{y}) = \dfrac{1}{2\pi} \oint_{\partial G} u(\mathbf{x}) \dfrac{\partial}{\partial n}(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds$. Het is nu voldoende om de normale afgeleide van de Greense functie $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \ln \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| - \ln \|\mathbf{x} - \mathbf{y}^*\| - \ln\left(\frac{\|\mathbf{y}\|}{R}\right)$ te bepalen. Nu geldt $\nabla_{\mathbf{x}} \ln \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \dfrac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}$ en

$$\frac{\partial}{\partial n} \ln(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) = \nabla \ln(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\mathbf{x}\|^2 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}.$$

Dan is

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{(\|\mathbf{x}\|^2 - \mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\|\mathbf{x}-\mathbf{y}^*\|^2 - (\|\mathbf{x}\|^2 - \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}^*)\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2\|\mathbf{x}-\mathbf{y}^*\|^2}.$$

Gebruik makend van $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}^*\|\|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ levert dit $\dfrac{\partial G}{\partial n} = \dfrac{\|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}$.

Door nu $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ te nemen vinden we dat $u(\mathbf{0}) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(R,\phi)d\phi$. Door deze formule toe te passen op $v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}+\mathbf{a})$ krijgen we een soortgelijke formule voor een willekeurige cirkelschijf in $\mathbf{R}^2$:

Gevolg: $u(\mathbf{a}) = \dfrac{1}{2\pi R}\displaystyle\int_{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|=R} u(\mathbf{x})ds.$

Dit resultaat kunnen we interpreteren door te zeggen dat de waarde die een harmonische functie in een punt $\mathbf{a}$ aanneemt gelijk is aan de gemiddelde waarde van u over een cirkel met middelpunt $\mathbf{a}$. Een soortgelijk resultaat geldt ook voor bollen in $\mathbf{R}^n$ en staat bekend als de *middelwaardestelling* voor harmonische functies:

Propositie 5.5 (*de middelwaardestelling voor harmonische functies*): Zij $G \subset \mathbf{R}^n$ een gebied en $u : G \to \mathbf{R}$ een harmonische functie. Zij verder $\mathbf{a} \in G$ en $B(\mathbf{a}, R') = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < R'\} \subset G$. Dan geldt, voor $R < R'$

$$u(\mathbf{a}) = \frac{1}{V(R)}\int_{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|=R} u(\mathbf{x})dA$$

waarbij $V(R) = R^{n-1}\Omega_n$ de oppervlakte van de $(n-1)$-dimensionale bol met straal R is in $\mathbf{R}^n$.

Voor een bewijs zie de opgaven. Een gevolg van de middelwaardestelling is

Propositie 5.6 (*het maximumprincipe*): Laat u een niet-constante harmonische functie $u : G \to \mathbf{R}$ op een gebied G zijn. Dan neemt u nergens op G een minimum of maximum aan.

Bewijs: Neem aan u een maximum aanneemt in een punt $\mathbf{a} \in G$. Dan geldt voor $\epsilon > 0$ klein genoeg, en $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \le \epsilon$, dat $\mathbf{x} \in G$ en $u(\mathbf{x}) \le u(\mathbf{a})$. Volgens de middelwaardestelling is dan

$$u(\mathbf{a}) = \frac{1}{V(\epsilon)}\int_{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|=\epsilon} u(\mathbf{x})dA \le \frac{1}{V(\epsilon)}\int_{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|=\epsilon} u(\mathbf{a})dA = u(\mathbf{a}).$$

Maar dan is u constant in een open omgeving van $\mathbf{a}$. De verzameling punten waar u de waarde $\mathbf{a}$ aanneemt is dus open in G. Omdat u continu is, is de verzameling punten waar u niet gelijk is aan $\mathbf{a}$ ook open. Omdat G samenhangend is, is een van beide verzamelingen leeg, d.w.z. ofwel u is constant op G ofwel u neemt nergens op G een maximum aan. Het maximum wordt dan aangenomen op de rand. Dezelfde redenering gaat op voor het minimum van een harmonische functie (we kunnen ook de functie $-u$ beschouwen). $\diamond$

Het volgende resultaat is een omkering van Propositie 5.5:

Propositie 5.7: Zij $u : G \to \mathbf{R}$ een continue functie is op een gebied G die voor elk punt $\mathbf{a} \in G$ aan de middelwaardestelling voldoet. Dan is u harmonisch op G.

Bewijs: Zij $\mathbf{x} \in G$ en laat C een cirkelschijf zijn met middelpunt $\mathbf{x}$ waarvan de afsluiting $\bar{C}$ geheel binnen G ligt. Er bestaat nu een harmonische functie v op C die op de rand ∂C gelijk is aan u. v voldoet aan de middelwaardestelling en dus ook $u - v$. Dan geldt voor $u - v$ het maximumprincipe op C en $u - v = 0$ op ∂C. Maar omdat $u - v$ geen maximum en geen minimum aanneemt binnen C, is $u - v = 0$ op C en dus is $u = v$ harmonisch in C en i.h.b. in $\mathbf{x}$. $\diamond$

Opmerking 3: de formule van Poisson in $\mathbf{R}^3$. Voor $n > 2$ gelden analoge formules van Poisson en Schwarz voor een halfruimte, resp. het inwendige van een bol. Zo geldt voor een harmonische functie u in $G = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 : \|\mathbf{x}\| < R\}$:

$$u(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\|\mathbf{x}\|=R} u(\mathbf{x}) \frac{\|\mathbf{x}\|(\|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{3/2}} d^2A =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \; u(R,\theta,\phi) R \frac{R^2 - \|\mathbf{y}\|^2}{(R^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2R\|\mathbf{y}\| \cos\gamma)^{3/2}}$$

waarbij γ de hoek is tussen de vector $\mathbf{y}$ en de vector $\mathbf{x} = (R\sin\theta\cos\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\cos\theta)$.

Opmerking 4: het uitwendige Dirichletprobleem. Bij het *uitwendige Dirichletprobleem* is sprake van een functie v die harmonisch is buiten een (enkelvoudig samenhangend) begrensd gebied G, waarbij verder wordt geëist dat de functie v begrensd blijft voor $r \to \infty$. Voor G een cirkelschijf, resp. het inwendige van een bol in $\mathbf{R}^n$ kan het uitwendige Dirichletprobleem tot het inwendige Dirichletprobleem worden herleid door op te merken dat voor een functie $u(r,\Omega)$ die harmonisch is voor $r < R$ geldt dat de functie $v(r,\Omega) = \frac{1}{r^{n-2}} u(R^2/r, \Omega)$ harmonisch is voor $r > R$. Voor G het uitwendige van een cirkelschijf in $\mathbf{R}^2$ vinden we dan voor $\mathbf{y} \in G$

$$v(\mathbf{y}) = v(r,\phi) = u(\frac{R^2}{r},\phi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(R,\phi) \frac{R^2 - \|\mathbf{y}\|^2}{R^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2R\|\mathbf{y}\| \cos(\phi - \psi)} d\phi, \tag{5.23}$$

waarbij ψ het argument is van $\mathbf{y}$. Merk tenslotte nog op dat de oplossing van het Dirichletprobleem op een onbegrensd gebied (zoals het uitwendige Dirichletprobleem) zonder extra voorwaarden niet uniek is. Zo zijn de functies $u_b(r,\phi) = b(r - 1/r)\cos\phi$ (met r, ϕ poolcoördinaten) harmonisch voor $r > 1$ en $u(1,\phi) = 0$.

Opmerking 5: Het Neumannprobleem in $\mathbf{R}^2$. Voor een enkelvoudig samenhangend begrensd gebied G met een gladde rand Γ kunnen we de oplossing van het Neumannprobleem herleiden tot de oplossing van het Dirichletprobleem. Stel we zoeken een harmonische functie v in G zodanig dat v continu is op $G \cup \Gamma$ en $\frac{\partial v}{\partial n}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ voor $\mathbf{x} \in \Gamma$. Parametriseer Γ d.m.v. de booglengte t: voor $\mathbf{x} \in \Gamma$ geldt $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ $(0 \le t \le T)$ en $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$. De uitwendige normaal in $\mathbf{x}$ is $(y'(t), -x'(t))$. Laat u de oplossing zijn van het Dirichletprobleem met randvoorwaarde $u(x(t), y(t)) = F(t) = \int_0^t g(t')dt'$. Laat verder voor $(x,y) \in G$: $v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} u_y dx - u_x dy$. Hierbij is (x_0, y_0) een vast maar verder willekeurig punt in G. Dan is $v_x = u_y$ en $v_y = -u_x$ (de functie v heet een *harmonisch geconjugeerde* van u). Dan is $\Delta v = 0$ op G en op Γ is $\frac{\partial v}{\partial n} = v_x y'(t) - v_y x'(t) = u_y y'(t) + u_x x'(t) = \frac{du}{dt} = g(t)$. Dus v is een oplossing van het Neumannprobleem. v is op een constante na bepaald (de ondergrens van de integraal is vrij te kiezen), de eis dat $\int_0^T g(t')dt' = 0$ is nodig opdat F een eenwaardige functie wordt, m.a.w. $F(0) = F(T)$.

Opmerking 6: Zij $G \subset \mathbf{C}$ een gebied en $f : G \to \mathbf{C}$ een analytische functie. Volgens de Cauchy-Riemann-vergelijkingen geldt voor $u = \mathrm{Re} f$, $v = \mathrm{Im} f$: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{yx} = 0$, dus u is harmonisch op G. Omgekeerd, laat $u : G \to \mathbf{R}$ harmonisch op G zijn. Dan is er een analytische functie $f = u + iv : G \to \mathbf{C}$ zodanig dat $u = \mathrm{Re} f$: omdat $v_x = -u_y, v_y = u_x$ ligt v op een constante na vast door $v(z) = \int_{(z_0)}^{(z)} u_y dx - u_x dy$ waarbij $z_0, z \in G$. In twee dimensies is de theorie van harmonische functies dus equivalent met de theorie van analytische functies van één complexe variabele.

Opmerking 7: De formule van Poisson voor R^2 is ook af te leiden m.b.v. de Fourierreeksontwikkeling: in §3.5 hebben we gezien dat de oplossing van het Dirichletprobleem op $\|\mathbf{x}\| < 1$ te schrijven is als $u(r,\phi) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi)$ met $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(1,\phi)d\phi$, $a_n = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(1,\phi)\cos n\phi d\phi$ en $b_n = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(1,\phi)\sin n\phi d\phi$ $(n > 0)$. Als we de integraaluitdrukkingen invullen in de som en som en integraal verwisselen en gebruik maken van het feit dat $1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \dfrac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}$, krijgen we de formule van Poisson.

§5.6. De vergelijking van Helmholtz.

We beschouwen nu de d.v. van Helmholtz $Lu = \Delta u + k^2 u = 0$. We zoeken weer een fundamentele oplossing die voldoet aan $L(u_f) = C\delta(\mathbf{x})$ voor $C \neq 0$ constant. Uit symmetrie-overwegingen zoeken we een oplossing die alleen van $r = \|\mathbf{x}\|$ afhangt. De Laplaciaan Δu van een functie op $\mathbf{R}^n$ die alleen van de radiële coördinaat r afhangt, is te schrijven als $\Delta u = u_{rr} + \dfrac{n-1}{r}u_r$. De gezochte functie $u = u_f$ voldoet dus aan

$$u_{rr} + \frac{n-1}{r}u_r + k^2 u = 0 \tag{5.24}$$

voor $r > 0$. Merk op dat als $u = u(r)$ voldoet aan (5.24), dan voldoet de functie $w = r^{-1}u_r$ aan $w_{rr} + \dfrac{n+1}{r}w_r + k^2 w = 0$. Uit de fundamentele oplossingen voor $n = 1, 2$ kunnen we dus de fundamentele oplossingen voor $n = 3, 4, \ldots$ construeren. Voor $n = 1$ zijn er twee lineair onafhankelijke oplossingen $u_1(r) = e^{ikr}$ en $u_2(r) = e^{-ikr}$. Als $k^2 > 0$ is er geen fundamentele oplossing die naar 0 gaat als $r \to \infty$, maar wel zijn u_1 en u_2 begrensd op $\mathbf{R}$. Als $k^2 < 0$ dan is er een (op een constante na) unieke oplossing die naar nul gaat als $r \to \infty$: $u_f(r) = e^{-|k|r}$. Voor $n = 2$ en $k^2 = 1$ is de vergelijking (5.24) de nulde-orde Besselvergelijking. De oplossing is dus een lineaire combinatie van de (nulde-orde) Besselfunctie $J_0(kr)$ en de Neumannfunctie $Y_0(kr)$. J_0 is niet singulier in $r = 0$, maar wel is $J_0(kr) = O(1/\sqrt{r})$ voor $r \to \infty$. $Y_0(kr) - \frac{2}{\pi}J_0(kr)\ln(kr)$ is een even analytische functie, dus de Neumannfunctie heeft een logaritmische singulariteit in $r = 0$. Ook gaat $Y_0(kr)$ naar 0 als $r \to \infty$, dus $Y_0(kr)$ is een fundamentele oplossing (op een onbelangrijke factor na), maar ook $Y_0(kr) + AJ_0(kr)$ voldoet voor een willekeurige constante A. In de literatuur vindt men ook wel als fundamentele oplossing de (complexwaardige) *Hankel-functies* $H_0^{(1)}(kr) = J_0(kr) + iY_0(kr)$ en $H_0^{(2)}(kr) = J_0(kr) - iY_0(kr)$. Voor $k^2 < 0$ is de oplossing $I_0(|k|r) = J_0(i|k|r)$ analytisch voor $r = 0$ en gaat naar oneindig als $r \to \infty$; de oplossing $K_0(|k|r) = J_0(i|k|r) + iY_0(i|k|r)$ is singulier in $r = 0$ en gaat naar 0 als $r \to \infty$. $K_0(|k|r)$ is dus een fundamentele oplossing voor het geval dat $k^2 < 0$. I_0 en K_0 heten *gemodificeerde Besselfuncties (van de eerste en tweede soort).* Voor $n = 3$ volgt dat $\dfrac{e^{\pm ikr}}{r}$ fundamentele oplossingen zijn voor $k^2 > 0$ (en $\dfrac{e^{-|k|r}}{r}$ als $k^2 < 0$). Uit een analoge redenering als bij (5.18") volgt dat $(\Delta + k^2)(\dfrac{e^{ikr}}{r}) = -4\pi\delta(\mathbf{x})$.

De d.v. van Helmholtz treedt op als een eigenwaardenvergelijking bij de Laplace-operator. Laat $G \subset \mathbf{R}^n$ een gebied met stuksgewijs gladde rand zijn. We beschouwen het eigenwaardenprobleem

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{op } G, \qquad u(\mathbf{x}) = 0 \text{ resp. } \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) = 0 \text{ voor } \mathbf{x} \in \partial G. \tag{5.25}$$

Laat u, resp. v eigenfuncties zijn bij eigenwaarde λ resp. μ. Dan is volgens (5.15)

$$0 = \int_G (u\Delta v - v\Delta u)d^n\mathbf{x} = (\lambda - \mu)\int_G u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d^n\mathbf{x}. \tag{5.26}$$

We tonen eerst aan dat de eigenwaarden reëel zijn: als u een eigenfunctie is met eigenwaarde λ dan is $\bar{u}$ eigenfunctie bij eigenwaarde $\bar{\lambda}$. Door $v = \bar{u}$ te kiezen zien we dat $\lambda = \bar{\lambda}$ omdat $\displaystyle\int_G u(\mathbf{x})\overline{u(\mathbf{x})}d^n\mathbf{x} > 0$ (tenzij $u = 0$) en dus is $\lambda \in \mathbf{R}$. Door het reële of imaginaire deel van u te kiezen kunnen we aannemen dat u reëel is. Als $\lambda \neq \mu$ eigenwaarden zijn met eigenfuncties u resp. v dan volgt uit (5.26) dat $\displaystyle\int_G u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d^n\mathbf{x} = 0$ dus u, v zijn orthogonaal t.o.v. het inproduct $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_G f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d^n\mathbf{x}$. Tenslotte tonen we aan dat de eigenwaarden positief zijn in het geval van (homogene) Dirichlet-randvoorwaarden en niet-negatief in het geval van Neumann-randvoorwaarden (in het laatste geval is $\lambda = 0$ eigenwaarde met eigenfunctie 1): (5.14) met $u = v$ en $\Delta u + \lambda u = 0$ geeft dat $\displaystyle\int_G (\nabla u(\mathbf{x}))^2 d^n\mathbf{x} = \lambda \int_G u(\mathbf{x})^2 d^n\mathbf{x}$ en hieruit volgt de bewering meteen. Een voorbeeld van zo'n eigenwaardenprobleem is uitgewerkt in voorbeeld 3 van §4.5.

De uitdrukking $\lambda = \dfrac{\int_G (\nabla u(\mathbf{x}))^2 d^n\mathbf{x}}{\int_G u(\mathbf{x})^2 d^n\mathbf{x}}$ geeft een methode om de eigenwaarden te benaderen: de kleinste eigenwaarde λ_1 is het minimum van het *Rayleighquotiënt* $R(v) = \lambda = \dfrac{\int_G (\nabla v(\mathbf{x}))^2 d^n\mathbf{x}}{\int_G v(\mathbf{x})^2 d^n\mathbf{x}}$ over de verzameling U van functies v die aan de randvoorwaarden voldoen. Door een geschikte functie v te kiezen en $R(v)$ te bepalen vinden we een bovengrens voor λ_1. Op dezelfde manier kunnen we de andere eigenwaarden bepalen: de op een na kleinste eigenwaarde λ_2 is het minimum van $R(v)$ genomen over alle functies $v \in U$ die orthogonaal zijn met de eigenfunctie bij eigenwaarde λ_1. Zie voor een uitgebreidere bespreking §10.6.

§5.7. Het hyperbolische geval: de golfvergelijking.

We beschouwen de hyperbolische d.v. $u_{tt} - c^2\Delta u = 0$ waarbij $u = u(\mathbf{x}, t)$ een functie is van $n + 1$ variabelen en $c > 0$ een constante is. De variabele t identificeren we met de tijd; de ruimtelijke variabelen noteren we d.m.v. $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. We bekijken eerst het geval dat $n = 1$.

De eendimensionale golfvergelijking. Zij $u(x, t)$ een oplossing van de vergelijking $u_{tt} - c^2u_{xx} = 0$. Onder de coördinatentransformatie $(x, t) \to (\xi, \eta)$ gaat $u(x, y)$ over in $v(\xi, \eta)$ en de d.v. voor v is

$$v_{\xi\xi}(\xi_t^2 - c^2\xi_x^2) + 2v_{\xi\eta}(\xi_t\eta_t - c^2\xi_x\eta_x) + v_{\eta\eta}(\eta_t^2 - c^2\eta_x^2) + v_\xi(\xi_{tt} - c^2\xi_{xx}) + v_\eta(\eta_{tt} - c^2\eta_{xx}) = 0.$$

ξ is een karakteristieke coördinaat van de d.v. als $\xi_t^2 - c^2\xi_x^2 = 0$, ofwel $\xi_x = \pm c\xi_t$ (en analoog voor η). Er zijn dus twee onafhankelijke karakteristieke coördinaten $\xi = x - ct$ en $\eta = x + ct$. De functie $v(\xi, \eta) = u(x, y)$ voldoet dan aan de d.v. $4c^2v_{\xi\eta} = 0$ en deze heeft de oplossing $v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$ voor willekeurige (differentieerbare) functies f en g. De algemene oplossing van de eendimensionale golfvergelijking is dus $u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ voor willekeurige f, g.

We beschouwen nu het Cauchy-(beginwaarden)probleem met beginvoorwaarden $u(x, 0) = \phi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$ voor $x \in [a, b] \subset \mathbf{R}$. Als we de algemene vorm van de oplossing invullen, vinden we

$$f(x) + g(x) = \phi(x), \quad -cf'(x) + cg'(x) = \psi(x).$$

Hieruit kunnen we $f(x)$ en $g(x)$ oplossen en we krijgen zo de *oplossingsformule van d'Alembert*

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\big(\phi(x + ct) + \phi(x - ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)dy. \tag{5.27}$$

Uit de formule van d'Alembert blijkt dat de oplossing $u(x,t)$ in het punt $P(x_P, t_P)$ niet afhangt van alle waarden van $u(x,0)$ en $u_t(x,0)$ maar alleen voor $x \in D(P) = [x_P - ct_P, x_P + ct_P]$. Het interval $D(P)$ wordt in het Engels het *domain of dependence* van P genoemd. Omgekeerd, laat $Q(x_Q, 0)$ een punt op de x-as zijn. Voor waarden van x waarvoor op tijdstip t de waarde van $u(x,t)$ (mede) afhangt van de waarden van u en u_t in Q geldt dat $x_Q - ct \le x \le x_Q + ct$. Het interval $I(Q) = [x_Q - ct, x_Q + ct]$ heet in het Engels het *domain of influence* van Q. $D(P)$ en $I(Q)$ worden begrensd door de karakteristieken $x \pm ct = C$. Merk verder op dat als $u(x,0)$ een discontinuïteit heeft in de vorm van een sprong, deze discontinuïteit blijft bestaan aan weerszijden van een karakteristiek.

De oplossingsformule (5.27) kan ook worden gebruikt als het domein van de x-waarden slechts een deelverzameling van $\mathbf{R}$ is, door de functies ϕ en ψ op een geschikte manier voort te zetten tot geheel $\mathbf{R}$. Voor de randen van het domein zijn dan extra randvoorwaarden nodig. Als voorbeeld beschouwen we de golfvergelijking op een halve rechte $x > 0$:

Beschouw het randwaardenprobleem

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & \text{voor } x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x) & \text{voor } x > 0 \\ u(0,t) = \chi(t) & \text{voor } t > 0. \end{cases} \tag{5.28}$$

Als $\phi(x)$ en $\psi(x)$ zijn gedefinieerd op geheel $\mathbf{R}$ dan geldt formule (5.27). In het bijzonder is dan

$$\chi(t) = u(0,t) = \frac{1}{2}\big(\phi(ct) + \phi(-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{+ct} \psi(y)dy.$$

Definieer nu $\psi(x) = 0$ voor $x < 0$. Als ϕ, ψ op geheel $\mathbf{R}$ zijn gedefinieerd, dan geldt, voor $\xi = ct > 0$,

$$\phi(-\xi) = 2\chi(\frac{\xi}{c}) - \phi(\xi) - \frac{1}{c}\int_0^{\xi} \psi(y)dy. \tag{5.28$'$}$$

In het geval dat $x - ct < 0$ vullen we (5.28') voor $\xi = ct - x$ in formule (5.27) in en vinden voor de oplossing

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\phi(x+ct) - \phi(-x+ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{-x+ct}^{x+ct} \psi(y)dy + \chi\big(t - \frac{x}{c}\big) \qquad (x - ct < 0).$$

Als $\chi(t) = 0$ (vaste rand), dan wordt aan het uiteinde $x = 0$ de golf gespiegeld in de t-as (dit is het eenvoudigst in te zien door $\psi = 0$ te kiezen).

Sferische golven. M.b.v. de formule van d'Alembert kunnen we de oplossingen van de golfvergelijking $c^2\Delta u = u_{tt}$ voor $\mathbf{R}^3$ bepalen die alleen afhangen van de radiële coördinaat r en van de tijd t. Als $u = u(r,t)$ dan is $\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r = \frac{1}{r}(ru)_{rr}$ en de golfvergelijking wordt dan $c^2(ru)_{rr} = (ru)_{tt}$. Dit is de eendimensionale golfvergelijking en de algemene oplossing is $u(r,t) = \frac{f(r-ct)}{r} + \frac{g(r+ct)}{r}$ met f, g willekeurige (differentieerbare) functies. De eerste term stelt uitgaande golven voor, die zich voortplanten in de richting van toenemende r, de tweede term stelt ingaande golven voor, die zich voortplanten in de richting van afnemende r.

De golfvergelijking in meer dimensies. In het geval dat de dimensie $n > 1$, voldoen de karakteristieke oppervlakken $\xi = \xi_0$ aan de d.v. $\xi_{x_1}^2 + \ldots \xi_{x_n}^2 = c^2\xi_t^2$. Oplossingen hiervan zijn de *karakteristieke kegels* $(x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2 = c^2(t - t^0)^2$, de karakteristieken zijn de rechten op de kegels, dit zijn precies de lichtstralen.

Het beginwaardenprobleem in $\mathbf{R}^3$. Beschouw op $\mathbf{R}^3$ het beginwaardenprobleem

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \quad \text{voor } t > 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \\ u(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}) \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{5.29}$$

Verder eisen we dat u zich rustig gedraagt als $\|\mathbf{x}\| \to \infty$. We kunnen (5.29) op de volgende manier herleiden tot het geval dat $\phi = 0$: merk eerst op dat als u_1 een oplossing is van $u_{tt} - c^2\Delta u = 0$ met $u_1(\mathbf{x}, 0) = 0, (u_1)_t(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x})$ en u_2 een oplossing is met $u_2(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x})$ en $(u_2)_t(\mathbf{x}, 0) = 0$, dan is $u = u_1 + u_2$ een oplossing van (5.29). We kunnen dus een van beide randvoorwaarden homogeen maken. Laat nu u een oplossing zijn van het beginwaardenprobleem $\begin{cases} u_{tt} - c^2\Delta u = 0 & (t > 0) \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0 \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}) \end{cases}$.
Laat $v(\mathbf{x}, t) = u_t(\mathbf{x}, t)$. Dan voldoet v opnieuw aan de d.v. $v_{tt} - c^2\Delta v = 0$ en verder is $v(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x})$ en $v_t(\mathbf{x}, 0) = u_{tt}(\mathbf{x}, 0) = \Delta u(\mathbf{x}, 0) = 0$. Het is dus voldoende om (5.29) op te lossen voor het geval dat $\phi(\mathbf{x}) = 0$.

Om (5.29) op te lossen passen we een Fouriertransformatie toe. Laat $U(\mathbf{k}, \omega) = = \int_{\mathbf{R}^4} u(\mathbf{x}, t) e^{-i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{x} dt$ de Fouriergetransformeerde van $u(\mathbf{x}, t)$ zijn. Indien u voldoende snel naar 0 daalt als $\|\mathbf{x}\|, t \to \infty$, geldt de omkeerformule $u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbf{R}^4} U(\mathbf{k}, \omega) e^{i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{k} d\omega$. Als u niet voldoende snel daalt dan is de Fouriergetransformeerde vaak nog steeds gedefinieerd als een distributie. De Fouriergetransformeerden van Δu en u_{tt} zijn respectievelijk $-k^2 U(\mathbf{k}, \omega)$ en $-\omega^2 U(\mathbf{k}, \omega)$ waarbij k staat voor $\|\mathbf{k}\|$. De Fouriergetransformeerde van de golfvergelijking wordt dan $(-k^2c^2 + \omega^2)U(\mathbf{k}, \omega) = 0$ en dus is $U(\mathbf{k}, \omega) = 0$ als $\omega \neq \pm ck$. Dit invullen in de omkeerformule geeft

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbf{R}^3} U(\mathbf{k}) e^{ikct + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + V(\mathbf{k}) e^{-ikct + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{k}$$

voor zekere functies U, V. Verder volgt uit $u(\mathbf{x}, 0) = 0$ dat $U(\mathbf{k}) + V(\mathbf{k}) = 0$ voor alle $\mathbf{k}$ en dus kunnen we schrijven $u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{R}^3} W(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \sin ckt d^3\mathbf{k}$. De functie $W(\mathbf{k})$ is te bepalen uit de tweede randvoorwaarde: $\psi(\mathbf{x}) = u_t(\mathbf{x}, 0) = \int_{\mathbf{R}^3} W(\mathbf{k}) ck e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{k}$. Toepassen van de omkeerformule op deze uitdrukking geeft $W(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3 kc} \int_{\mathbf{R}^3} \psi(\mathbf{y}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} d^3\mathbf{y}$ zodat

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} \int_{\mathbf{R}^3} \psi(\mathbf{y}) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{\sin kct}{kc} d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{k}. \tag{5.30}$$

Om deze uitdrukking te vereenvoudigen, keren we de integratievolgorde om. We berekenen apart de integraal over $\mathbf{k}$:

$$\int_{\mathbf{R}^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{\sin kct}{kc} d^3\mathbf{k} = \frac{2\pi}{c} \int_0^\infty \int_0^\pi e^{ik\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \cos\theta} k \sin kct \sin\theta d\theta dk =$$

$$= 4\pi \int_0^\infty \frac{\sin kct \sin k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{c\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} dk = 2\pi \int_0^\infty \frac{\cos k(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| - ct) - \cos k(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| + ct)}{c\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} dk =$$

$$= \pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|-ct)} - e^{ik(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|+ct)}}{c\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} dk = \frac{2\pi^2}{c\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \big(\delta(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| - ct) - \delta(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| + ct)\big)$$

(in de laatste regel is gebruikt dat in 1 dimensie de Fouriergetransformeerde van e^{ikx} gelijk is aan $2\pi\delta(x)$. De laatste uitdrukking vullen we in in (5.30):

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c} \int_{\mathbf{R}^3} \psi(\mathbf{y}) \frac{\delta(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| - ct) - \delta(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| + ct)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} d^3\mathbf{y}.$$

Deze integraal is te schrijven als een tweedimensionale integraal over de bol met straal $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$: voor $t > 0$ is $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = +ct$ dus

$$u(x, y, z, t) = \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \psi(x + ct \sin u \cos v, y + ct \sin u \sin v, z + ct \cos u) \sin u du dv =: tM_t(\psi). \tag{5.31}$$

Voor $t < 0$ is $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = -ct$ en we vinden dan eveneens

$$u(x, y, z, t) = \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \psi(x - ct \sin u \cos v, y - ct \sin u \sin v, z - ct \cos u) \sin u du dv = tM_t(\psi)$$

waarbij in de laatste stap de coördinatentransformatie $v \to v + \pi$ is toegepast. De oplossing van het volledige beginwaardenprobleem (5.29) is dus gelijk aan

$$u(\mathbf{x}, t) = tM_t(\psi) + \frac{\partial}{\partial t}\big(tM_t(\phi)\big). \tag{5.32}$$

In feite moet nog worden nagegaan dat de uitdrukking (5.32) inderdaad een oplossing van (5.29) levert omdat niet alle bewerkingen die we hebben uitgevoerd om de oplossing te verkrijgen, in alle gevallen geoorloofd zijn. Deze stap laten we hier achterwege. De oplossing (5.32) heet ook wel de *oplossingsformule van Poisson.*

Aan de vorm van de oplossing (5.31),(5.32) is te zien dat $u(\mathbf{x}, t)$ voor $t > 0$ alleen afhangt van de beginwaarden $u(\mathbf{y}, 0) = \phi(\mathbf{y})$ en $u_t(\mathbf{y}, 0) = \psi(\mathbf{y})$ voor $\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| = ct$, m.a.w. het *domain of dependence* van een punt $(\mathbf{x}, t)$ is de bol $\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| = ct$ in $\mathbf{R}^3$. Een signaal dat gedurende een tijd $\Delta\tau$ vanaf een zeker punt P wordt uitgezonden, bereikt het punt Q pas na een tijd $t = PQ/c$. Na een tijd $\Delta\tau$ is het signaal uit Q verdwenen. Dit veschijnsel heet wel het *principe van Huygens.* Het principe van Huygens betekent ook dat de vorm van het signaal dat Q bereikt op tijdstip t alleen afhangt van de vorm van het signaal op tijdstip $\tau < t$ in de punten met afstand $c(t - \tau)$ van Q. Deze punten vormen dus a.h.w. een nieuwe verzameling bronnen voor het signaal dat Q op tijdstip t bereikt.

Het beginwaardenprobleem in $\mathbf{R}^2$. We bekijken nu het beginwaardenprobleem

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2\Delta u = 0 & \text{voor } t > 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \\ u(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}) \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}) \end{cases}.$$

We kunnen de oplossing van het beginwaardenprobleem in $\mathbf{R}^2$ herleiden uit de oplossingsformule voor $\mathbf{R}^3$ door de z-afhankelijkheid te laten vervallen. Opnieuw is de oplossing (5.32), maar nu is

$$tM_t(\psi) = \frac{2t}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \psi(x + ct \sin u \cos v, y + ct \sin u \sin v) \sin u du dv$$

en m.b.v. de coördinatentransformatie $\rho = ct \sin u, \phi = v$ is dit te schrijven als

$$tM_t(\psi) = \frac{1}{2\pi c} \int_0^{2\pi} \int_0^{ct} \frac{\psi(x + \rho\cos\phi, y + \rho\sin\phi)}{\sqrt{c^2t^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\phi. \tag{5.33}$$

Aan de vorm van (5.33) zien we dat het principe van Huygens niet geldt voor twee dimensies: een in een punt P uitgezonden signaal van begrensde duur bereikt een punt Q weliswaar pas na een tijd $t = PQ/c$, maar in tegenstelling tot het geval van drie dimensies blijft de invloed van het signaal merkbaar voor alle $t > PQ/c$. De hier gebruikte methode om de oplossing voor twee dimensies te herleiden uit het geval van drie dimensies wordt in de Engelse literatuur de *method of descent* genoemd.

Opmerking: Voor hogere dimensies geldt eveneens een principe van Huygens voor oneven dimensie maar niet voor even dimensie.

Het uitstralingsprobleem. We beschouwen nu het inhomogene beginwaardenprobleem in $\mathbf{R}^3$

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2\Delta u = g(\mathbf{x}, t) & \text{voor } t > 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \\ u(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}) & \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}) & \end{cases}. \tag{5.34}$$

Hierbij is $g(\mathbf{x}, t)$ op te vatten als een bronterm. De oplossing van (5.34) kunnen we weer schrijven als de som $u_1 + u_2$ van een oplossing u_1 van het beginwaardenprobleem (5.29) (zonder bronterm) en een oplossing u_2 van (5.34) met homogene randvoorwaarden $\phi = \psi = 0$. Het eerste probleem hebben we hierboven opgelost; het is dus voldoende om homogene randvoorwaarden te veronderstellen. De oplossing van (5.34) met $\psi = \phi = 0$ kan nu worden herleid tot de oplossing van het beginwaardenprobleem (5.29) m.b.v. het volgende resultaat:

Propositie 5.8 (*principe van Duhamel*): Laat $v(\mathbf{x}, t, \tau)$ de oplossing zijn van het randwaardenprobleem

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2\Delta v = 0 & \text{voor } t > \tau \geq 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \\ v(\mathbf{x}, \tau, \tau) = 0 & \\ v_t(\mathbf{x}, \tau, \tau) = g(\mathbf{x}, \tau) & \end{cases}.$$

Dan voldoet $u(\mathbf{x}, t) = \displaystyle\int_0^t v(\mathbf{x}, t, \tau) d\tau$ aan $\begin{cases} u_{tt} - c^2\Delta u = g(\mathbf{x}, t) & \text{voor } t > 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0 & \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = 0 & \end{cases}.$

Bewijs: Differentiëren geeft $u_t(\mathbf{x}, t) = v(\mathbf{x}, t, t) + \displaystyle\int_0^t v_t(\mathbf{x}, t, \tau) d\tau = \int_0^t v_t(\mathbf{x}, t, \tau) d\tau$. I.h.b. is $u(\mathbf{x}, 0) = 0$ en $u_t(\mathbf{x}, 0) = v(\mathbf{x}, 0, 0) = 0$. Nogmaals differentiëren geeft

$$u_{tt}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t v_{tt}(\mathbf{x}, t, \tau) d\tau + v_t(\mathbf{x}, t, t) =$$

$$= \int_0^t c^2 \Delta v(\mathbf{x}, t, \tau) d\tau + v_t(\mathbf{x}, t, t) = c^2 \Delta u(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}, t). \qquad \diamond$$

Uit (5.32) en Propositie 5.8 volgt dat de oplossing van het uitstralingsprobleem (5.34) gegeven wordt door

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t (t - \tau) M_{t-\tau}\big(g(\mathbf{x}, \tau)\big) d\tau. \tag{5.35}$$

Als speciaal geval nemen we $g(\mathbf{x},t) = \delta(\mathbf{x})h(t) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)h(t)$. Dan is

$$M_{t-\tau}\big(g(\mathbf{x},\tau)\big) = \frac{h(\tau)}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\delta(x+c(t-\tau)\sin u\cos v)\delta(y+c(t-\tau)\sin u\sin v)\delta(z+c(t-\tau)\cos u)\sin u du dv.$$

M.b.v. de substitutie $\rho = c(t-\tau)$ wordt de oplossing

$$u(\mathbf{x},t) = \int_0^t (t-\tau)M_{t-\tau}\big(g(x,\tau)\big)d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{ct}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{h(t-\rho/c)}{c^2\rho}\delta(x+\rho\sin u\cos v)\delta(y+\rho\sin u\sin v)\delta(z+\rho\cos u)\rho^2\sin u du dv d\rho.$$

Dit is een integraal over het inwendige van de bol $\|\mathbf{x}\| = ct$. De integraal uitrekenen geeft

$$\begin{cases} u(\mathbf{x},t) = 0 & \text{als } r = \|\mathbf{x}\| > ct \\ u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi}\frac{h(t-r/c)}{c^2 r} & \text{als } r = \|\mathbf{x}\| < ct \end{cases}. \tag{5.36}$$

Als we $h(\tau) = \delta(\tau)$ kiezen, dan krijgen we de Greense functie voor de operator $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\Delta$: $G(\mathbf{x},t,\mathbf{0},0) = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\delta(t-\|\mathbf{x}\|/c)}{c^2\|\mathbf{x}\|}$ en door een eenvoudige coördinatentransformatie vinden we

$$G(\mathbf{x},t,\mathbf{y},\tau) = \frac{1}{4\pi}\frac{\delta(t-\tau-\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|/c)}{c^2\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}.$$

In tegenstelling tot het geval van 1 dimensie is hier de Greense functie, ondanks de naam, geen gewone functie, maar een distributie. De oplossing van het uitstralingsprobleem (5.34) met $\phi = 0, \psi = 0$ is dus

$$u(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbf{R}^3}\int_0^{\infty} G(\mathbf{x},t,\mathbf{y},\tau)g(\mathbf{y},\tau)d\tau d^3\mathbf{y} = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbf{R}^3}\frac{g(\mathbf{y},t-\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|/c)}{c^2\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}d^3\mathbf{y} \tag{5.37}$$

waarbij $g(\mathbf{x},t) = 0$ voor $t < 0$. De oplossing (5.37) heet een *geretardeerde potentiaal.*

De integraal van Kirchhoff. Diffractie. Voor een willekeurig gebied $G \subset \mathbf{R}^n$ is het ondoenlijk om een Greense functie te bepalen. Wel kunnen we een formule afleiden zoals (5.18) en bepaalde aannamen doen over het gedrag van de oplossing op de rand van het gebied. We bekijken het geval $n = 3$ en beschouwen het geval van (vrije) voortplanting van *monochromatische straling* in een gebied G met (stuksgewijs gladde) rand ∂G zonder bronnen, d.w.z. we nemen voor de oplossing een functie van de vorm $u(\mathbf{x},t) = v(\mathbf{x})e^{-ickt}$ met $k > 0$. In dat geval voldoet v aan de vergelijking van Helmholtz $\Delta v + k^2 v = 0$ in G. M.b.v. de tweede formule van Green (5.15) geldt dan

$$\int_G\left(\frac{e^{ikr}}{r}\Delta v - v\Delta\frac{e^{ikr}}{r}\right)d^3\mathbf{x} = \oint_{\partial G}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right)d^2A$$

waarbij $r = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ en we voor u in (5.15) de fundamentele oplossing $\dfrac{e^{ikr}}{r}$ van de Helmholtz-operator hebben genomen (u is dus niet de oplossing $u(\mathbf{x},t)$!). Als $\mathbf{y}$ buiten $G\cup\partial G$ ligt, dan wordt de integraal over G nul, terwijl als $\mathbf{y} \in G$, dan is $(\Delta + k^2)\dfrac{e^{ikr}}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ en het linkerlid wordt dan $4\pi v(\mathbf{y})$. In plaats van de deltafunctie te gebruiken kunnen we ook, analoog aan de afleiding van (5.18), een bolletje S_ϵ met straal ϵ rondom $\mathbf{y}$ uit G uitsluiten, en vervolgens ϵ naar nul laten gaan. Voor $\mathbf{y} \in G$ geldt dus *de integraalformule van Kirchhoff*:

$$v(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial G} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right) d^2A. \tag{5.38}$$

De integraalformule (5.38) geldt ook voor een onbegrensd gebied (zoals een halfruimte, begrensd door een vlak) waarbij we het gebied afsluiten door een stuk ∂S_R van een bol met grote straal R. Als v en $\nabla v(\mathbf{x})$ voldoende snel naar nul gaan als $\mathbf{x} \in G$ en $\|\mathbf{x}\| \to \infty$, dan gaat de integraal over de bolschil ∂S_R naar nul als $R \to \infty$ en het rechterlid wordt dan de integraal over de open rand ∂G. Kirchhoff paste formule (5.38) toe op diffractie van (monochromatisch) licht: laat $G \subset \mathbf{R}^3$ een halfruimte zijn en de rand ∂G een vlak, die bestaat uit een scherm waarin een opening O is aangebracht. Het licht wordt uitgestraald door een puntbron in een punt Q dat zich buiten G en ∂G bevindt. We kunnen $v(\mathbf{x})$ opvatten als een amplitude van de lichtgolf. Omdat de waarden van v en ∇v op ∂G niet bekend zijn, kunnen we $v(\mathbf{y})$ in feite ook niet bepalen. Kirchhoff deed de aanname dat op het scherm de waarden van v en ∇v nul zijn, terwijl in de opening O de waarden van v en ∇v gelijk zijn aan de waarden die ze zouden hebben in het geval dat er geen scherm zou zijn. In dat geval is $v(\mathbf{x}) = v_0 \cdot \dfrac{e^{ikr_0}}{r_0}$ waarbij r_0 de afstand is tussen het punt $\mathbf{x}$ en de bron Q. Dan is $\nabla v = v_0 e^{ikr_0} \left(-\dfrac{1}{r_0^2} + \dfrac{ik}{r_0} \right) \mathbf{e}_{r_0}$ waarbij $\mathbf{e}_{r_0}$ de eenheidsvector is die van Q naar $\mathbf{x}$ wijst. Net zo is $\nabla \dfrac{e^{ikr}}{r} = e^{ikr} \left(-\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{ik}{r} \right) \mathbf{e}_r$ met $\mathbf{e}_r = \dfrac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}$. Dan wordt (5.38)

$$v(\mathbf{y}) = \frac{v_0}{4\pi} \int_O \left(\frac{e^{ik(r+r_0)}}{r} \left(-\frac{1}{r_0^2} + \frac{ik}{r_0} \right) \mathbf{e}_{r_0} \cdot \mathbf{n} - \frac{e^{ik(r+r_0)}}{r_0} \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n} \right) d^2A$$

waarbij $\mathbf{n}$ de uitwendige normaal op O is. Voor grote waarden van r, r_0, d.w.z. veel groter dan de schermopening en veel groter dan de golflengte $2\pi/k$ van het licht, is deze uitdrukking te benaderen door

$$v(\mathbf{y}) \approx v_0 \cdot \frac{ik}{4\pi} \int_O \frac{e^{ik(r+r_0)}}{rr_0} (\mathbf{e}_{r_0} - \mathbf{e}_r) \cdot \mathbf{n} \, d^2A \approx v_0 \cdot \frac{ik}{4\pi r r_0} (\mathbf{e}_{r_0} - \mathbf{e}_r) \cdot \mathbf{n} \int_O e^{ik(r+r_0)} \, d^2A \tag{5.39}$$

Uit (5.39) zien we dat de amplitude in P van een golf uitgezonden door een puntbron in Q gelijk is aan de amplitude in Q die een golf zou hebben die wordt uitgezonden door een even sterke bron die zich in P bevindt (*de reciprociteitswet van de buigingstheorie*). Voor openingen van een eenvoudige vorm kunnen we de integraal in (5.39) expliciet berekenen. Neem aan dat O een cirkelvormige opening is met straal a. We voeren Cartesische coördinaten x, y, z in zo, dat G de halfruimte $z > 0$ is en O de cirkel $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ is. Op O voeren we poolcoördinaten ρ, ϕ in, zodat $x = \rho \cos\phi$ en $y = \rho \sin\phi$ voor een punt $(x, y, 0) \in O$. Laat (x_0, y_0, z_0) en (x_1, y_1, z_1) de coördinaten zijn van Q resp. $\mathbf{y}$. Dan is voor een punt $(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, 0)$ op O: $r_0^2 = (x_0 - \rho\cos\phi)^2 + (y_0 - \rho\sin\phi)^2 + z_0^2 = R_0^2 - 2\rho(x_0\cos\phi + y_0\sin\phi) + \rho^2$ waarbij R_0 de afstand van Q tot het midden van de opening is. Dus is
$r_0 \approx R_0 - \dfrac{\rho}{R_0}(x_0\cos\phi + y_0\sin\phi)$ waarbij termen van orde ρ^2/R^2 zijn verwaarloosd (*Fraunhofer-diffractie*). Analoog geldt $r \approx R_1 - \dfrac{\rho}{R_1}(x_1\cos\phi + y_1\sin\phi)$ met R_1 de afstand van $\mathbf{y}$ tot het midden

van het scherm. Dan geldt, met $\alpha = \dfrac{x_0}{R_0} + \dfrac{x_1}{R_1}$ en $\beta = \dfrac{y_0}{R_0} + \dfrac{y_1}{R_1}$

$$\int_O e^{ik(r+r_0)} d^2A = e^{ik(R_1+R_0)} \int_0^{2\pi} \int_0^a e^{-ik\rho(\alpha\cos\phi+\beta\sin\phi)} \rho d\rho d\phi =$$

$$= e^{ik(R_1+R_0)} \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} e^{-ikA\rho\cos(\phi-\phi_0)} d\phi \right) \rho d\rho$$

voor zekere ϕ_0 en $A = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. De integraal over ϕ is te herleiden m.b.v. de integraaluitdrukking voor de Besselfunctie $J_0(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ix\cos\phi} d\phi$ en verder gebruiken we dat $\dfrac{d}{dx}(xJ_1(x)) = xJ_0(x)$. Dit levert uiteindelijk

$$\int_O e^{ik(r+r_0)} d^2A = 2\pi e^{ik(R_1+R_0)} \int_0^a d\rho\rho J_0(k\rho A) = \frac{2\pi e^{ik(R_1+R_0)} a}{kA} J_1(kaA). \tag{5.40}$$

Fraunhofer-diffractie door een cirkelvormig scherm levert dus een ringvormig diffractiepatroon waarbij de minima op afstanden evenredig met de nulpunten van de eerste-orde Besselfunctie J_1 vanaf het centrum liggen.