Tentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen

Maandag 4 januari 2016, 10:00 - 13:00 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of een verwijzing naar de theorie.
- Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven die allevier ongeveer even zwaar tellen.

---

1. Beschouw voor $t > 0$ de inhomogene singuliere tweede orde vergelijking,

$$t^2\ddot{x} + 4t\dot{x} + 2x = f(t), \tag{1}$$

waarin $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar is *op heel* $\mathbb{R}$ – in het bijzonder is $f(t)$ dus ook glad rond $t = 0$ en bestaat $f(0)$.

(a) Beschouw eerst het homogene probleem $f(t) \equiv 0$. Bepaal de algemene oplossing $x_{\rm h}(t) = x_{\rm h}(t; A, B)$ van (1), waarbij $A, B \in \mathbb{R}$ de vrij te kiezen parameters zijn.

(b) Neem nog steeds $f(t) \equiv 0$. Bepaal de unieke waarden A^* en B^* van de vrije parameters uit onderdeel (a) zodanig dat de limiet $\lim_{t\downarrow 0} x_{\rm h}(t; A^*, B^*)$ bestaat. Geef de expliciete – enigszins triviale – uitdrukking voor $x_{\rm h}^*(t) \stackrel{\rm def}{=} x_{\rm h}(t; A^*, B^*)$.

(c) Beschouw nu het inhomogene probleem en bepaal wederom een expliciete uitdrukking voor de algemene oplossing $x_{\rm in}(t) = x_{\rm in}(t; C, D)$ van (1), waarbij nu $C, D \in \mathbb{R}$ de vrije parameters zijn.

(d) Bepaal ook in dit geval C^* en D^* zodanig dat $\lim_{t\downarrow 0} x_{\rm in}(t; C^*, D^*)$ bestaat – met $x_{\rm in}(t)$ zoals gevonden in (c).

(e) Geef een uitdrukking voor $x_{\rm in}^*(t) \stackrel{\rm def}{=} x_{\rm in}(t; C^*, D^*)$ en bepaal $x_{\rm in}^*(0)$ $(= \lim_{t\downarrow 0} x_{\rm in}^*(t))$.

2.A(i). Beschouw voor $\rho > 1$ de 1-dimensionale vergelijking,

$$\dot{x} = x^\rho. \tag{2}$$

Bepaal de oplossing $x_1(t)$ van (2) die voldoet aan de beginvoorwaarde $x_1(1) = 1$.

A(ii). De oplossing $x_1(t)$ bestaat alleen voor $t \in (-\infty, T^*(\rho))$, $T^*(\rho) < \infty$ (omdat $\rho > 1$): bepaal (de maximale waarde van) $T^*(\rho)$.

B(i). Beschouw in $\mathbb{R}^n$ het lineaire systeem,

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}. \tag{3}$$

Neem aan dat de coëfficiënten van de $n \times n$ matrix A constant zijn – dus niet van t afhangen – en dat de matrix A n *verschillende, reële* eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ heeft. Laat zien dat (3) geen *niet-triviale* oplossingen $\vec{x}_{\rm loc}(t)$ – dus $\vec{x}_{\rm loc}(t) \not\equiv \vec{0}$ – kan hebben waarvoor geldt dat zowel $\lim_{t\to+\infty} \vec{x}_{\rm loc}(t) = \vec{0}$ als $\lim_{t\to-\infty} \vec{x}_{\rm loc}(t) = \vec{0}$.

B(ii). Laat aan de hand van een voorbeeld zien dat (3) wel een niet-triviale oplossing $\vec{x}_{\rm loc}(t)$ met $\lim_{t\to+\infty} \vec{x}_{\rm loc}(t) = \lim_{t\to-\infty} \vec{x}_{\rm loc}(t) = \vec{0}$ kan hebben als de matrix A expliciet van de tijd t afhangt (ofwel: als $A = A(t)$).

Z.O.Z.

3. Beschouw de tweede orde vergelijking,

$$\ddot{x} - x + x^3 = g(\dot{x}), \tag{4}$$

waarin $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continu differentieerbare functie is met $g(0) = 0$.

(a) Schrijf (4) als een 2-dimensionaal systeem en laat zien dat dit systeem 3 kritieke punten $(x_-^*, 0), (x_0^*, 0), (x_+^*, 0)$ heeft, waarbij $x_-^* < x_0^* < x_+^*$. Merk op dat deze niet van $g(y)$ – met $g(0) = 0$ – afhangen.

(b) Neem $g(y) \equiv 0$ en laat zien dat de banen van (4) op niveaukrommen van de uitdrukking $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$ liggen.

(c) Neem $g(y) \equiv 0$ en geef een schets van het faseportret – geef in deze schets de vaste punten en (minstens) een vijftal banen.

(d) Beschouw nu het algemene geval $g(y) \not\equiv 0$ (met $g(0) = 0$). Laat zien dat het punt $(x_0^*, 0)$ altijd instabiel is.

(e) Laat voor algemene $g(y)$ (met $g(0) = 0$) zien dat de punten $(x_\pm^*, 0)$ beide asymptotisch stabiel zijn als $g'(0) < 0$.

(f) Beschouw nu $g(y) = y^n$, $n \in \mathbb{N}$. Laat zien dat *als n oneven is* de punten $(x_\pm^*, 0)$ beide instabiel zijn.

4. Beschouw het in poolcoördinaten $(r, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi]$ gegeven stelsel,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{r} & = & 1 - r \quad + \quad \sigma H(r, \theta), \\ \dot{\theta} & = & G(r, \theta), \end{array} \right. \tag{5}$$

waarin $\sigma \in \mathbb{R}$ en $G, H : (0, \infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ niet-triviale, continu differentieerbare functies van r en θ zijn, die periodiek zijn als functie van $\theta \in [0, 2\pi]$ – zie $(*)$ onder aan deze opgave.

(a) Neem aan dat $G(r, \theta) \neq 0$ voor alle $(r, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi]$. Laat zien dat systeem (5) een periodieke oplossing in een omgeving van $\{r = 1\}$ heeft als $|\sigma|$ 'voldoende klein' is. Ofwel: laat zien dat er een $\sigma_0 > 0$ bestaat zodanig dat (5) een periodieke oplossing in een omgeving van $\{r = 1\}$ heeft voor alle σ waarvoor geldt dat $|\sigma| < \sigma_0$. *Hint.* Wat kan je zeggen over (het teken van) $\dot{r}$ als $r = 1 \pm \delta$?

(b) Laat zien dat de uitspraak uit (a) ook correct is als alleen de eis $G(1, \theta) \neq 0$ wordt opgelegd. Maak duidelijk welk extra argument er aan de redenering bij (a) moet worden toegevoegd (en onderbouw dit argument).

(c) Neem nu aan dat er wel nulpunten θ^* bestaan van de vergelijking $G(1, \theta) = 0$. In dit geval is het niet noodzakelijk dat (5) een (niet-constante) periodieke oplossing heeft in een omgeving van $\{r = 1\}$ – hoe klein $|\sigma|$ ook gekozen wordt. Leg deze uitspraak uit aan de hand van een goed gemotiveerde schets van een mogelijk faseportret van systeem (5) in een omgeving van $\{r = 1\}$.

$(*)$ De continu differentieerbare functies G en H voldoen dus aan: $G(r, \theta) \not\equiv 0$, $H(r, \theta) \not\equiv 0$, $G(r, 2\pi) \equiv G(r, 0)$, $H(r, 2\pi) \equiv H(r, 0)$ en $\frac{\partial G}{\partial \theta}(r, 2\pi) \equiv \frac{\partial G}{\partial \theta}(r, 0)$, $\frac{\partial G}{\partial \theta}(r, 2\pi) \equiv \frac{\partial G}{\partial \theta}(r, 0)$.