Tentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen

Maandag 9 maart 2015, 14:00 - 17:00 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of een verwijzing naar de theorie.
- Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven die allevier even zwaar tellen.

---

1. Gegeven is de tweede orde differentiaalvergelijking,

$$\ddot{y} + t\dot{y} + y = 0. \tag{1}$$

De oplossingen $y_1(t)$ en $y_2(t)$ – met $y_1(0) = 1$, $\dot{y}_1(0) = 0$ en $y_2(0) = 0$, $\dot{y}_2(0) = 1$ – vormen per definitie twee lineair onafhandelijke oplossingen van (1).

(a) Laat *door middel van reeksontwikkelingen rond* $t_0 = 0$ zien dat $y_1(t)$ gegeven wordt door $y_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$.

(b) Laat $W[y_1, y_2](t) = W(t)$ de bij de oplossingen $y_1(t)$ en $y_2(t)$ horende Wronskiaan zijn. Laat – zonder gebruik te maken van (a) – zien dat $W(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$.
Opmerking/Herinnering. $W(t) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 \end{pmatrix}$

(c) Toon aan dat $y_2(t)$ een oplossing is van de eerste orde vergelijking $\dot{y} + ty = 1$.
Hint. Gebruik (a) en (b).

(d) Bepaal een expliciete uitdrukking voor $y_2(t)$.

2 **A.** Beschouw de inhomogene tweede orde vergelijking

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = 3. \tag{2}$$

A(i). Bepaal een expliciete uitdrukking voor de algemene oplossing $x_{alg}(t)$.

A(ii). Definieer $x_\alpha(t)$ als *een* oplossing van (2) waarvoor geldt dat $x_\alpha(0) = \alpha$. Beredeneer dat als $x_\alpha(0) = \alpha < 0$ er een $t_* > 0$ moet zijn waarvoor geldt dat $x_\alpha(t_*) = 0$.
Hint. Bepaal (het teken van) $\lim_{t\to\infty} x_\alpha(t)$.

A(iii). Zijn er oplossingen $x_{alg}(t)$ die meer dan 1 (positief) nulpunt hebben? Ofwel: zijn er oplossingen $x(t)$ van (2) waarvoor er $t_{2,*} > t_{1,*} > 0$ bestaan zo danig dat $x(t_{1,*}) = x(t_{2,*}) = 0$?

B. Beschouw het lineaire systeem,

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}. \tag{3}$$

Bepaal de algemene oplossing en geef een schets van het faseportret.

Z.O.Z.

3. Beschouw het 1-dimensionale autonome probleem

$$\dot{x} = f(x), \tag{4}$$

waarbij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar is.

(a) Leg (zorgvuldig) uit dat een (niet-constante) oplossing $x(t)$ van (4) *niet* periodiek kan zijn.
Hint. Merk op dat zowel het fase-'vlak' als de oplossing $x(t)$ 1-dimensionaal is.

In het vervolg van deze opgave nemen we aan dat $f(x)$ positief is en periodiek is met periode $L > 0$ (ofwel: voor iedere $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $f(x + L) = f(x)$). We definiëren tevens de functie $G(x)$,

$$G(x) = \int_0^x \frac{1}{f(\xi)}\, d\xi, \tag{5}$$

(b) Toon aan dat $G(x + L) - G(x)$ constant is als functie van $x \in \mathbb{R}$ en dat deze constante gelijk is aan $G(L) > 0$.
Hint. Bepaal $\frac{d}{dx}G(x)$ en $\frac{d}{dx}G(x + L)$.

(c) Laat $x(t)$ een oplossing zijn van (4). Toon aan dat $G(x(a)) - G(x(b)) = a - b$ voor alle $a, b \in \mathbb{R}$
Hint. Bepaal $\frac{d}{dt}G(x(t))$.

(d) Laat nu zien dat $x(t)$ een zeer gelijkmatig groeigedrag heeft: $x(t + G(L)) = x(t) + L$, voor alle $t \in \mathbb{R}$.
Opmerking. Laat zien dat $G(x)$ strikt stijgend is en dus inverteerbaar is.

4. Beschouw het stelsel

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & y - 2x^2, \\ \dot{y} & = & x(3 - y - x^2). \end{array} \right. \tag{6}$$

(a) Bepaal de vaste punten/evenwichtspunten en karakteriseer deze. Geef voor elk punt aan of het asymptotisch stabiel, stabiel of instabiel is.

(b) Bepaal de nullclines – de verzamelingen in het (x, y)-vlak waarop danwel $\dot{x} = 0$ danwel $\dot{y} = 0$ – schets deze in het (x, y)-vlak en geef (met pijltjes) het teken van $\dot{x}$ en $\dot{y} = 0$ aan in de gebieden waarin het (x, y)-vlak door de nullclines wordt onderverdeeld. Geef ook (met pijltjes) de richting van $(\dot{x}, \dot{y})$ aan op de nulclines.

De krommen/nullclines $\mathcal{N}_x = \{y = 2x^2\}$ en $\mathcal{N}_y = \{y = 3 - x^2\}$ delen het vierkant $\mathcal{V} = \{0 < x < \sqrt{3}, 0 < y < 6\}$ op in 4 (open) gebieden, $\mathcal{S}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$ – zie de schets bij (b). Deze gebieden zijn rond het punt $(1, 2)$ in de richting van de wijzers van de klok genummerd, waarbij $\mathcal{S}_1$ aan het interval $(0, \sqrt{3})$ op de x-as grenst, $\mathcal{S}_2$ aan het interval $(0, 3)$ op de y-as grenst, etcetera. De oplossing van (6) met beginvoorwaarden (x_0, y_0) wordt genoteerd als $(x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0)))$ – ofwel: $(x(0; (x_0, y_0)), y(0; (x_0, y_0))) = (x_0, y_0)$.

(c) Neem aan dat $(x_0, y_0) \in \mathcal{S}_1$. Laat zien dat òfwel $\lim_{t\to\infty}(x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0))) = (1, 2)$, òf er bestaan $\tilde{t} > 0$ zodanig dat $(x(\tilde{t}; (x_0, y_0)), y(\tilde{t}; (x_0, y_0))) \in \mathcal{S}_2$.

(d) Definieer het gebied $\tilde{\mathcal{S}}_2 \subset \mathcal{S}_2$ als het deelgebied van $\mathcal{S}_2$ onder de lijn $y = x + 1$. Laat zien dat voor $(x_0, y_0) \in \tilde{\mathcal{S}}_2$ geldt dat $\lim_{t\to\infty}(x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0))) = (1, 2)$.

(e) Leg uit dat voor iedere beginvoorwaarde (x_0, y_0) in het vierkant $\mathcal{V}$ $(= \{0 < x < \sqrt{3}, 0 < y < 6\})$ geldt dat $\lim_{t\to\infty}(x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0))) = (1, 2)$.