Tentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen

Maandag 5 januari 2015, 10:00 - 13:00 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of een verwijzing naar de theorie.
- Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven die allevier even zwaar tellen.

---

1. Gegeven is de inhomogene tweede orde vergelijking,

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + x = f(t), \tag{1}$$

met $\alpha \in \mathbb{R}$ een parameter en $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (minstens) continu.

(a) Neem $\alpha = 1$ en $f(t) \equiv 0$. Geef de algemene oplossing van vergelijking (1).

(b) Neem $f(t) \equiv 0$: voor welke $\alpha \in \mathbb{R}$ heeft vergelijking (1) niet-triviale oplossingen die begrensd zijn op heel $\mathbb{R}$? (Ofwel: oplossingen waarvoor een $M > 0$ bestaat zodanig dat de oplossing voor alle $t \in \mathbb{R}$ begrensd is door M.)
Opmerking. Een niet-triviale oplossing is een oplossing die niet identiek gelijk aan 0 is.

(c) Neem $\alpha = 1$ en $f(t) = \cos t$. Geef de algemene oplossing van vergelijking (1).

(d) Neem $f(t) = \cos t$: voor welke $\alpha \in \mathbb{R}$ heeft vergelijking (1) een oplossing die begrensd is op heel $\mathbb{R}$?

2A(i). Beschouw voor $\beta \in \mathbb{R}$ en $t \geq 0$ de Euler vergelijking,

$$t^2\ddot{y} - 2t\dot{y} + \beta y = 0. \tag{2}$$

Neem $\beta = 2$: bepaal de algemene oplossing van (2). Merk op dat deze continu differentieerbaar is voor alle $t \geq 0$.

A(ii). Voor welke $\beta \in \mathbb{R}$ is de algemene oplossing van (2) continu differentieerbaar voor alle $t \geq 0$ – en dus met name ook in het punt $t = 0$? Voor welke $\beta \in \mathbb{R}$ heeft (2) niet-triviale oplossingen die continu differentieerbaar zijn voor $t \geq 0$?
Opmerkingen. Het is niet nodig om apart te bewijzen dat functies als $\sqrt{t}$ en $t^{\frac{3}{4}}$ niet continu differentieerbaar zijn op $t = 0$. Verder is een niet-triviale oplossing ook hier een oplossing die niet identiek gelijk is aan 0.

B. Beschouw het lineaire systeem,

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \vec{x}. \tag{3}$$

Bepaal de algemene oplossing en schets het faseportret, *inclusief* de 'nullclines' met bijbehorende richtingspijltjes.

Z.O.Z.

3. **A.** Bepaal de algemene oplossing $y(x)$ van de vergelijking

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}.$$

Hint. Maak scheiding van variabelen mogelijk door een geschikt gekozen transformatie.

B. Beschouw de functie $\vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeven door

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Laat zien dat $\vec{x}(t)$ geen oplossing kan zijn van een autonoom systeem van de vorm $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ met $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (minstens) continu differentieerbaar.
Opmerking/Herinnering. 'Autonoom' betekent dat $\vec{f}(\vec{x})$ niet expliciet van t afhangt.

C. Van de 3 functies,

$$\psi_1(t) = t^2,\ \psi_2(t) = t^2 + e^{2t},\ \psi_3(t) = t^2 + 1 + e^{2t},$$

is gegeven dat ze ieder oplossing zijn van *dezelfde* inhomogene lineaire vergelijking,

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = f(t),$$

met de functies $p, q, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (minstens) continu. Bepaal $p(t)$, $q(t)$ en $f(t)$.
Hint. Aan welke vergelijking voldoen de verschillen $\psi_k(t) - \psi_\ell(t)$?

4. Beschouw voor $\mu \geq 0$ het stelsel

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \dot{x} & = & (1+\mu)y & + & x\left(1 - (x^2+y^2)\right)\left(4 - (x^2+y^2)\right), \\ \dot{y} & = & -x & + & y\left(1 - (x^2+y^2)\right)\left(4 - (x^2+y^2)\right). \end{array} \right. \tag{4}$$

(a) Neem $\mu = 0$. Schrijf het stelsel in poolcoördinaten.

(b) Neem $\mu = 0$. Schets het faseportret horende bij (4). Laat zien dat systeem (4) twee (verschillende, niet-constante) periodieke oplossingen heeft.

(c) Neem $\mu > 0$. Laat zien dat (4) alleen $(0,0)$ als kritiek punt heeft. Laat vervolgens zien dat $(0,0)$ voor alle $\mu > 0$ een instabiel kritiek punt van (4) is.

(d) Neem $\mu > 0$. Laat zien dat (4) twee verschillende (niet-constante) periodieke oplossingen heeft als μ voldoende klein is.
Opmerking. Een iets meer specifieke maar equivalente formulering luidt: Laat zien dat er een constante $\mu_0 > 0$ bestaat, zodanig dat voor $0 < \mu < \mu_0$ stelsel (4) twee verschillende (niet-constante) periodieke oplossingen heeft.