Thuisopdracht 6 Gewone Differentiaalvergelijkingen (2015-2016)

Door: Arjen Doelman, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden.

Opgegeven: vrijdag 4 december 2014.
Inleveren uitwerkingen: Òf voor 11.15 uur op donderdag 17 december, òf voor het begin van het tentamen op 4 januari – zie de website.

---

1. (Gebaseerd op een (her)tentamensom uit 2013-2014.)
Beschouw voor het stelsel,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} & = & y(4 - x^2 - y^2). \end{array} \right. \tag{1}$$

Definieer $(x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0)))$ als de oplossing van (1) met beginvoorwaarden $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, ofwel: $(x(0; (x_0, y_0)), y(0; (x_0, y_0))) = (x_0, y_0)$.

(a) Bepaal de kritieke punten van (1).

(b) Bepaal het stabiliteitskarakter – stabiel, asymptotisch stabiel, instabiel – van de in (a) gevonden kritieke punten.

(c) Neem aan dat de beginvoorwaarden (x_0, y_0) in het gebied $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ liggen, waarbij $\mathcal{G}$ gegeven is door

$$\mathcal{G} = \{(x, y) : x > 0, \ y > 0 \ \text{ en } \ 1 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

Met andere woorden: neem aan dat $(x(0; (x_0, y_0)), y(0; (x_0, y_0))) = (x_0, y_0) \in \mathcal{G}$. Laat zien dat $(x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0))) \in \mathcal{G}$ voor alle $t \geq 0$.

(d) Toon aan dat voor alle oplossingen $(x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0)))$ van (1) met $(x_0, y_0) \in \mathcal{G}$ geldt dat $\lim_{t\to\infty}(x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0))) = (0, 2)$.

(e) Bepaal $\lim_{t\to\infty}(x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0)))$ voor alle mogelijke keuzes van de beginvoorwaarden $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Bewijs je beweringen.

2. (Gebaseerd op een tentamensom uit 2014-2015.)
Beschouw voor $\mu \geq 0$ het stelsel

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} \dot{x} & = & (1 + \mu)y & + & x\,(1 - (x^2 + y^2))\,(4 - (x^2 + y^2))\,, \\ \dot{y} & = & -x & + & y\,(1 - (x^2 + y^2))\,(4 - (x^2 + y^2))\,. \end{array} \right. \tag{2}$$

(a) Neem $\mu = 0$. Schrijf het stelsel in poolcoördinaten.

(b) Neem $\mu = 0$. Schets het faseportret horende bij (2). Laat zien dat systeem (2) twee (verschillende, niet-constante) periodieke oplossingen heeft.

(c) Neem $\mu > 0$. Laat zien dat (2) alleen $(0, 0)$ als kritiek punt heeft. Laat vervolgens zien dat $(0, 0)$ voor alle $\mu > 0$ een instabiel kritiek punt van (2) is.

(d) Neem $\mu > 0$. Laat zien dat (2) twee verschillende (niet-constante) periodieke oplossingen heeft als μ voldoende klein is.
Opmerking. Een iets meer specifieke maar equivalente formulering luidt: Laat zien dat er een constante $\mu_0 > 0$ bestaat, zodanig dat voor $0 < \mu < \mu_0$ stelsel (2) twee verschillende (niet-constante) periodieke oplossingen heeft.