Thuisopdracht 5 Gewone Differentiaalvergelijkingen (2015-2016)

Door: Arjen Doelman, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden.

Opgegeven: donderdag 19 november 2015.
Inleveren uitwerkingen: voor het college van donderdag 3 december, 11.15 u.

1.) Beschouw voor $c \geq 0$ en $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ voldoende glad (minstens continu differentieerbaar) de nietlineaire oscillator met wrijving ($= c$),

$$\ddot{x} + c\dot{x} + f(x) = 0. \tag{1}$$

(a) Schrijf (1) als een 2-dimensionaal stelsel (met $y = \dot{x}$) en laat zien dat de kritieke punten van dit stelsel gegeven worden door $(x_*, 0)$ met x_* een oplossing van $f(x_*) = 0$.

(b) Het gelineariseerde systeem rond een kritiek punt $\vec{z}_*$ van de vergelijking $\dot{\vec{z}} = \vec{g}(\vec{z})$, $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$, wordt gegeven door

$$\dot{\vec{\xi}} = A\vec{\xi} \text{ met } A = Dg(\vec{z}_*), \tag{2}$$

de $n \times n$ Jacobi-matrix van het vectorveld $\vec{g}(\vec{z})$ in $\vec{z}_*$ (zie ook p. 390 in het boek). Bepaal de 2×2 matrix A horende bij een kritiek punt $(x_*, 0)$ van het in (a) bepaalde 2-dimensionale stelsel.

(c) Laat zien dat voor $c = 0$ de banen van (1) op de niveaukrommen van

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + F(x) \tag{3}$$

liggen. Geef een uitdrukking voor $F(x)$.

(d) Laat zien dat 'de energie' H uit (3) afneemt over banen van (1) als er wrijving is, ofwel als $c > 0$.
Hint. Bepaal $\dot{H} = \frac{d}{dt}H(x, y) = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y}$ en laat zien dat $\dot{H} \leq 0$.

In alle onderstaande onderdelen is $x_* \in \mathbb{R}$ een oplossing van $f(x) = 0$; het punt $(x_*, 0)$ is dus een kritiek punt van het in (a) bepaalde 2-dimensionale stelsel.

(e) Beschouw $c = 0$. Laat zien dat het kritieke punt $(x_*, 0)$ instabiel is als $f'(x_*) < 0$.
Hint. Gebruik hiervoor de matrix A uit (b) en Stelling 2 (op p. 386 van het boek).

(f) Laat zien dat ook in het algemene geval $c \geq 0$ geldt dat $(x_*, 0)$ instabiel is als $f'(x_*) < 0$.

(g) Laat zien dat voor $c > 0$ het kritieke punt $(x_*, 0)$ *asymptotisch* stabiel is als $f'(x_*) > 0$.

(h) Beschouw nu $c = 0$. Laat zien dat $(x_*, 0)$ stabiel, maar niet asymptotisch stabiel, is als $f'(x_*) > 0$.
Opmerking/Hint. Merk op dat Stelling 2 nu niet kan worden toegepast. Gebruik het feit dat voor $c = 0$ de banen van (1) gegeven worden door (3): hoe zien deze er in de omgeving van $(x_*, 0)$ uit als $f'(x_*) > 0$? Gebruik nu de definitie(s) van (asymptotische) stabiliteit.

(i) Neem $f'(x_*) > 0$. Laat zien dat het gedrag van het gelineariseerde systeem (2) rond $(x_*, 0)$ van een centrumpunt voor $c = 0$, via een (stabiel) spiraalpunt voor $0 < c < c_*$, in een stabiele knoop verandert ($c > c_*$). Bepaal c_* en geef een schets van het faseportret van (2) als $c = c_*$.

(j) Neem $c = 0$ en neem aan dat $f'(x_*) = 0$. Geef twee expliciete voorbeelden van functies $f_s(x)$ en $f_u(x)$ – met dus $f'_{s,u}(x_*) = 0$ – zodanig dat $(x_*, 0)$ stabiel is als $f(x) = f_s(x)$ en instabiel is als $f(x) = f_u(x)$. Geef in beide gevallen een schets van het faseportret van (1) in een omgeving van $(x_*, 0)$.
Hint. Kies voor het gemak $x_* = 0$ en gebruik weer (3).