Thuisopdracht 1 Gewone Differentiaalvergelijkingen (2015-2016)

Door: Arjen Doelman, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden.

Opgegeven: donderdag 10 september 2015.
Inleveren uitwerkingen: voor het college van donderdag 24 september, 11.15 u.

1.) Beschouw voor $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de inhomogene eerste orde vergelijking,

$$t\dot{x} + (1 + \alpha t)x = \beta t. \tag{1}$$

Opmerking: $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

(a) Beschouw eerst het homogene probleem, ofwel: neem eerst $\beta = 0$. Bepaal voor willekeurige $\alpha \in \mathbb{R}$ de algemene oplossing $x_{\mathrm{h},\alpha}(t)$ van het homogene probleem.

(b) Neem nu $\alpha = \beta = 1$. Bepaal de algemene oplossing $x_{\mathrm{i},1}(t)$ van de inhomogene vergelijking (1).

(c) Neem $\beta = 1$ en $\alpha \in \mathbb{R}$ en laat $x_{\mathrm{i},\alpha}(t)$ de algemene oplossing zijn van (1). Voor welke $\alpha \in \mathbb{R}$ bestaat $\lim_{t\to\infty} x_{\mathrm{i},\alpha}(t)$? Wat is deze limiet?

Opmerking: dit is som 1 van het (her)tentamen Analyse 3 (= de 'oude' naam van het college Gewone Differentiaalvergelijkingen) van februari 2014.

2.) Beschouw voor $\alpha \in \mathbb{R}$ de differentiaalvergelijking,

$$\dot{y} = \sqrt{y}, \quad y(0) = \alpha.$$

(a) Neem $\alpha = 0$. Construeer voor alle $n \geq 0$ benaderende oplossingen $y_n(t;0)$ met behulp van Picard-iteratie (met de standaardkeuze $y_0(t;0) \equiv y(0) = 0$). Bepaal de limietoplossing $y(t;0) = \lim_{n\to\infty} y_n(t;0)$.

(b) Neem $\alpha \neq 0$. Neem $y_0(t;\alpha) \equiv y(0) = \alpha$ en construeer de volgende twee benaderingen $y_1(t;\alpha)$ en $y_2(t;\alpha)$ met behulp van Picard-iteratie.

(c) Neem $\alpha \neq 0$. Bepaal *zonder verder hogere iteraties uit te rekenen* de limiet $y(t;\alpha) = \lim_{n\to\infty} y_n(t;\alpha)$. Leg uit hoe je aan je antwoord komt.

Merk op dat $\lim_{\alpha\to 0} y(t;\alpha)$ niet overeenkomt met de in onderdeel (a) geconstrueerde oplossing!

(d) Neem $\alpha = 0$. De Picard-iteratiemethode kan ook starten vanuit een andere beginkeuze. Neem als niet-standaardkeuze $\tilde{y}_0(t;0) = t^2$. Construeer nu wederom voor alle $n \geq 0$ benaderende oplossingen $\tilde{y}_n(t;0)$ met behulp van Picard-iteratie (nu dus met $\tilde{y}_0(t;0) = t^2$). Bepaal de limietoplossing $\tilde{y}(t;0) = \lim_{n\to\infty} \tilde{y}_n(t;0)$. *Hint.* Schrijf $\tilde{y}_n = 2^{\gamma_n} t^2$ en druk γ_n uit in γ_{n-1}.

(e) Neem $\alpha \neq 0$. Stel dat we ook in dit geval het Picard-iteratieproces vanuit een andere niet-standaardkeuze $\tilde{y}_0(t;\alpha)$ beginnen $^{(*)}$. Wat kan je zeggen over de limiet $\tilde{y}(t;\alpha)$? Leg uit.

$^{(*)}$ Hierbij kan je aannemen dat ook voor meer algemene $\tilde{y}_0$ het Picard-iteratieproces convergeert.